
Suites et séries de fonctions

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Modes de convergence pour les suites de fonctions	2
I.1	Convergence simple	2
I.2	Convergence uniforme	3
I.3	Convergence uniforme sur tout compact	6
II	Modes de convergence pour les séries de fonctions	7
II.1	Convergence simple	7
II.2	Convergence absolue	8
II.3	Convergence uniforme	9
II.4	Convergence normale	11
II.5	Comparaison des modes de convergence	12
III	Limite et continuité	13
III.1	Double limite	13
III.2	Continuité et limite uniforme	15
III.3	Continuité par convergence uniforme sur tout compact	16
III.4	Complétude de $\mathcal{C}(A, F)$	17
IV	Intégration et dérivation	18
IV.1	Intégration sur un segment et convergence uniforme	18
IV.2	Dérivation et convergence uniforme	20
V	Approximations	24
V.1	Approximation par des fonctions en escalier	24
V.2	Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass	26
V.3	Deuxième théorème de Weierstrass	27

Dans tout le chapitre :

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E et F sont de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies. Le plus souvent, $E = F = \mathbb{R}$.
- A une partie non vide de E
- $\mathcal{F}(A, F)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications de A dans F
- $\mathcal{B}(A, F)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications bornées de A dans F
- $\mathcal{C}(A, F)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications continues de A dans F
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de fonctions d'éléments de l'espace de $\mathcal{F}(A, F)$

I Modes de convergence pour les suites de fonctions

I.1 Convergence simple

Définition 1

On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur A si pour tout x de A la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$, d'éléments de F , converge.

Auquel cas, l'application

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \end{cases}$$

s'appelle la limite simple de (f_n) . On dit aussi que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur A vers f et on écrit $f_n \xrightarrow[\text{CVS}]{A} f$ ou $f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$.

Remarque :

$$f_n \xrightarrow[\text{CVS}]{A} f \iff \forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, 1] \longmapsto x^n$.

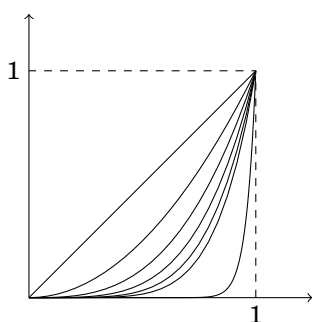
étudions la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$

Soit $x \in [0, 1]$, étudions la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$

- Si $0 \leq x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$
- Si $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$

Donc la suite (f_n) converge simplement vers f où

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$



Graphes des fonctions f_n

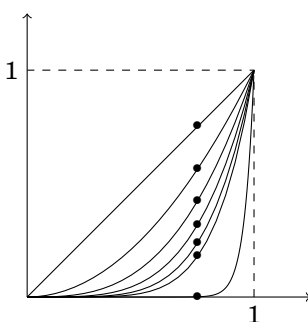
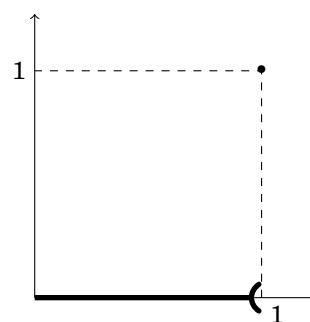


Illustration de la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$



Graphes de la fonction f

Exemple

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x+n}{n(1+x^2)}$.

Étudions la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Donc $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\text{CVS}} f$

I.2 Convergence uniforme**Définition 2**

Soit (f_n) une suite de fonctions de F^A et $f : A \rightarrow F$ une application.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si :

1. Il existe n_0 à partir duquel $f_n - f \in \mathcal{B}(A, F)$

2. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

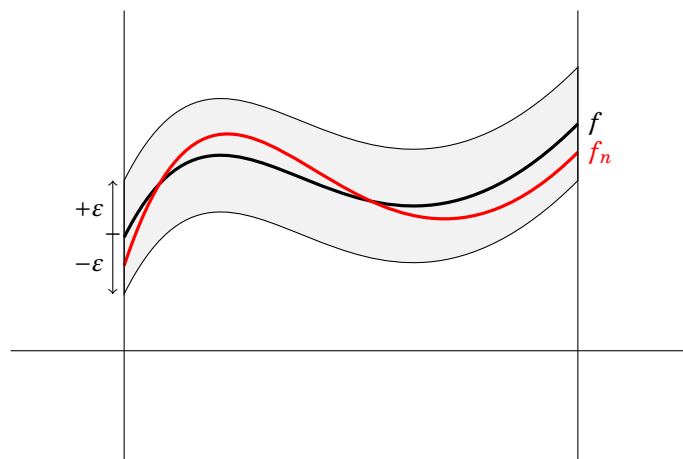
On note $f_n \xrightarrow[A]{\text{CVU}} f$ ou $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$.

Remarque :

Si $f_n \xrightarrow[A]{\text{CVU}} f$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } n \geq n_0 \text{ alors } \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Pour n assez grand, les graphes des f_n s'insèrent dans une bande de longueur 2ε autour du graphe de f .

**Exemple**

Soit $a \in [0, 1[$. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : \begin{cases} [0, a] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

Montrons que $f_n \xrightarrow[0,a]{\text{CVU}} 0$

Pour tout $x \in [0, a]$, on a $|f_n(x)| = |x^n| \leq |a^n| = a^n$, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ c'est-à-dire $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} 0$

Propriété 1: CU $\Rightarrow$ CS

Soit (f_n) une suite de fonctions de F^A et $f : A \rightarrow F$ une application. Si $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$, alors $f_n \xrightarrow[A]{CVS} f$

Preuve:

Supposons que $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$ et soit $x \in A$, on a $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. Donc $f_n \xrightarrow[A]{CVS} f$.

Remarque :

Par contraposée si une suite ne converge pas simplement il ne converge pas uniformément

Attention

La réciproque est fautive. Voir l'exemple ci-dessous

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-nx}$.

La suite (f_n) converge simplement vers l'application nulle. Mais $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} = 1$ ne tend pas vers 0

Exemple: Étude des variations

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n sur $[0, 1]$ par

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n(1-x) \end{cases}$$

Étudions la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Soit $x \in [0, 1[$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 et la suite $(f_n(1))$ est nulle, donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- On détermine $\sup_{[0,1]} |f_n(x)|$.

La fonction f_n est continue et dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$:

$$f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}[n - (n+1)x]$$

La fonction f_n admet un maximum α_n en $\frac{n}{n+1}$, avec $\alpha_n =$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}. \text{ Ainsi}$$

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est uniforme

x	0	α_n	1
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$f_n(\alpha_n)$	0

Exemple: Étude des variations

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudions la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est clair que f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ (séparer les cas $x = 0$, $x = 1$, $x \in]0, 1[$).

D'autre part, on a :

$$f'_n(x) = -nx^{n-1}(n \ln x + 1),$$

et la dérivée s'annule en $e^{-\frac{1}{n}}$. Or, $f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = -e^{-1}$ donc $\|f_n\|_\infty = e^{-1}$. La convergence n'est pas uniforme.

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	1
$f'_n(x)$	-	0	+
f_n	0	$-e^{-1}$	0

Remarque :

La norme infinie de la différence $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas toujours accessible et pour surmonter un tel problème on appelle le résultat suivant

Propriété 2

Soit (f_n) une suite de fonctions et $f \in F^A$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$;
2. Il existe une suite (ε_n) de réels positifs de limite nulle telle que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n$$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Prendre $\varepsilon_n = \|f_n - f\|_\infty$

2 $\Rightarrow$ 1) La convergence de la suite (ε_n) entraîne sa bornitude et $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in A$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n$, donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$

Exemple

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x+n}{n(1+x^2)}$.

Étudions la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{n(1+x^2)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$

Propriété 3: Non convergence uniforme

S'il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tend pas vers 0, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f

Preuve:

Si $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$, alors pour toute suite (x_n) d'éléments de A on a

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque :

Le résultat précédent donne une façon de démontrer la non convergence uniforme sans passer par le calcul de la norme infinie

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$. La suite (f_n) converge simplement vers f où

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1]$, on a $f_n(x_n) - f(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0$, donc la convergence n'est pas uniforme.

Méthode: Étude de la convergence uniforme

1. On détermine la limite simple f de la suite de fonctions ;
2. On montre que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0, par exemple en étudiant les variations de cette fonction, ou alors par majoration ;
3. pour prouver qu'il n'y a pas de convergence uniforme, on peut évaluer ou minorer convenablement $\|f_n - f\|_\infty$ ou bien contredire la définition et construire une suite (x_n) telle que la suite $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$

I.3 Convergence uniforme sur tout compact**Définition 3: Convergence uniforme sur tout compact**

Soit (f_n) une suite de fonctions de F^A et $f : A \rightarrow F$ une application.

On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de A vers f lorsque pour tout compact C de E tel que $C \subset A$

$$f_n|_C \xrightarrow[C]{CVU} f|_C$$

Propriété 4

La convergence uniforme entraîne la convergence uniformément sur tout compact.

Preuve:

Soit C un compact inclus A . Soit $x \in C$, on a :

$$\|f_n|_C(x) - f|_C(x)\| = \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Attention

La réciproque est fausse. Voir l'exemple ci-dessous

Exemple

Soit $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$.

La suite $f_n \xrightarrow[0,1[]{CVS} 0$ et $\|f_n\|_\infty = 1 \not\rightarrow 0$.

Soit C un compact de $\mathbb{R}$ inclus dans $[0, 1[$, puisqu'il est fermé et borné, il existe $a \in [0, 1[$ tel que $C \subset [0, a]$, puis

$$\sup_C \|f_n(x)\| \leq \sup_{[0,a]} \|f_n(x)\| = a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $f_n|_C \xrightarrow[C]{CVU} f|_C$. La suite (f_n) converge uniformément sur tout compact mais elle n'est pas uniformément convergente

Propriété 5

La convergence sur tout compact entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse.

Preuve:

Pour $x \in A$ le singleton $\{x\}$ est compact.

II Modes de convergence pour les séries de fonctions**Définition 4: Série de fonctions**

Soit $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

On appelle série de fonctions de terme général f_n , notée $\sum_{n \geq 0} f_n$, la suite de fonctions des sommes partielles

$$(S_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}} \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k$$

Remarque :

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est une série de fonctions où $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, alors pour tout $x \in A$ la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est à valeurs dans F

II.1 Convergence simple**Définition 5**

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $D \subset A$ si la suite des sommes partielles de

$$\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } D.$$

Autrement-dit $\forall x \in D$ la suite $(S_n(x))$ converge dans F ou encore la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge dans F .

Définition 6

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions convergente simplement sur $D \subset A$.

- On appelle la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, on la note $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, l'application

$$f : x \in D \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

- On définit enfin le reste d'ordre n par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = f - \sum_{k=0}^n f_k$

Définition 7: Ensemble de définition

Le sous-ensemble de A sur lequel la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement est le domaine de définition de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exemple: Zéta de Riemann

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n^x} \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est convergente si, et seulement, si $x \in]1, +\infty[$. Donc la série converge simplement sur $]1, +\infty[$, sa somme est appelée la fonction zéta de Riemann

$$\zeta : \begin{cases}]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}$$

Exemple: Zéta alternée de Riemann

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$h_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} h_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

► Si $x \leq 0$, alors $|h_n(x)| = n^{-x} \not\rightarrow 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge

► Si $x > 0$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, donc elle converge.

La série alternée de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est convergente si, et seulement, si $x \in]0, +\infty[$. Sa somme est appelée la fonction zéta alternée de Riemann

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$$

.

II.2 Convergence absolue**Définition 8: Convergence absolue**

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur A si la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_F$ converge simplement sur A

Propriété 6

La convergence absolue entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse

Preuve:

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions absolument convergente sur A .

Soit $x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|_F$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente, en particulier elle converge

Exemple: Zéta alternée de Riemann

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$h_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$$

Étudions la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} h_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|h_n(x)| = \frac{1}{n^x}$, donc la série $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge absolument sur $]1, +\infty[$

Remarque :

Cet exemple montre que la convergence simple n'implique pas la convergence absolue

II.3 Convergence uniforme

Définition 9

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A si la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A .
C'est-à-dire il existe $f \in F^A$ telle que $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Propriété 7

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A .
2. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \xrightarrow[A]{CVU} 0$

Remarque :

Ainsi, la convergence uniforme entraîne la convergence simple...

Exemple

Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Soit $x \in [0, +\infty[$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge, d'où la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

D'une autre part $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On conclut que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$

Exemple

Montrons que la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ sur $]1, +\infty[$ n'est pas uniforme.

La série converge simplement sur $]1, +\infty[$ de somme ζ . Si la convergence est uniforme, alors $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \leq R_n(x) \leq \|R_n\|_\infty$$

En faisant tendre x vers 1, on obtient

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \|R_n\|_\infty$$

ce qui contredit la convergence uniforme

Propriété 8: Condition nécessaire

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A , alors $f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$.

Preuve:

Soit $x \in A$, on a $f_n(x) = R_{n-1}(x) - R_n(x)$, donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \|R_n\|_\infty + \|R_{n-1}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$$

Attention

La réciproque est fautive. Voir l'exemple ci-dessous

Exemple

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$ et $\left\| \frac{1}{n^x} \right\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Remarque :

On peut appeler ce résultat pour démontrer la non convergence uniforme

Conséquence 1

Si f_n ne converge pas uniformément vers 0, alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément

Exemple

Étudions la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La série converge simplement sur $]0, +\infty[$ de somme μ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right\|_\infty = 1$, donc la convergence n'est pas uniforme.

Propriété 9: Cas d'une série alternée

On suppose que $F = \mathbb{R}$. Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A telle que

$\forall x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées.

Alors

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement, si $f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$

Preuve:

$\Rightarrow$) Toujours vraie

$\Leftarrow$) Supposons que $f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$

► Convergence simple :

Pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées, elle converge, d'où la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$

► Convergence uniforme :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité

$$\|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On conclut la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$

II.4 Convergence normale

Définition 10

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement (CVN) sur A lorsque :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur A .
- La série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge

Remarque :

Pour éviter le calcul de $\|f_n\|_\infty$ la norme infinie de f_n , on utilise le résultat suivant

Propriété 10

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A si, et seulement, s'il existe une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ à termes positifs convergente telle que

$$\forall x \in A : \|f_n(x)\| \leq a_n$$

Le terme a_n ne dépend pas de x

Preuve:

$\Rightarrow$ Prendre $a_n = \|f_n\|_\infty$

$\Leftarrow$ La série à termes positifs $\sum a_n$ converge, donc la suite (a_n) est majorée et, par suite, $f_n \in \mathcal{B}(A, F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, la convergence de la série $\sum a_n$ et le critère de comparaison assurent la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$

Exemple

Pour $n \geq 1$, on définit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n^2 + x}$.

Étudions la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, on gagne alors la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$

Propriété 11

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A , alors :

1. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur A .
2. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A .
3. $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A . En outre $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

Preuve:

1. Soit $x \in A$, on a $a \leq \|f_n(x)\| \leq \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n(x)\|$ converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument.

2. La convergence absolue entraîne la convergence simple

3. ► La convergence simple est assurée, on montre que le reste converge uniformément vers 0. Pour x dans A notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $\|R_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x , ce qui prouve que la suite des restes $(R_n)_n$ converge

uniformément vers 0 sur A , donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A .

► Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$

$$\|S_n(x)\| \leq \sum_{k=0}^n \|f_k\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

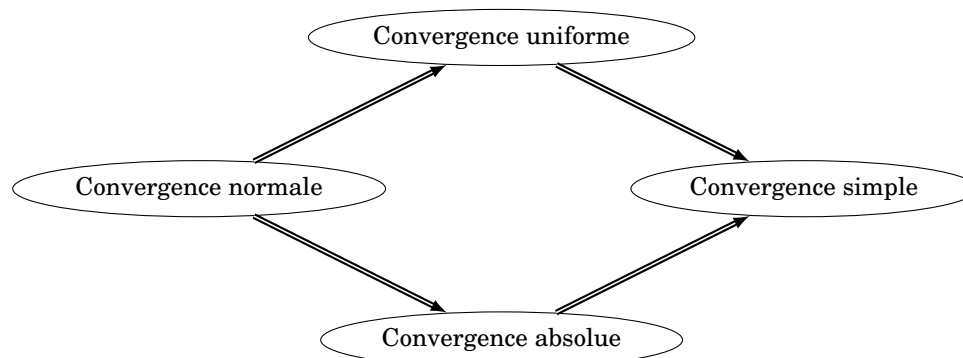
Il en résulte :

$$\forall x \in A, \|S(x)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$$

$$\text{Puis : } \|S\|_{\infty} = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty}$$

II.5 Comparaison des modes de convergence

Les relations entre les différents modes de convergence pour une série de fonctions peuvent être schématisées par le diagramme d'implications suivant :



III Limite et continuité

III.1 Double limite

Théorème 1: de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F et $a \in \overline{A}$.

Si :

- (f_n) converge uniformément sur A vers f .
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite $\lambda_n \in F$ en a .

Alors :

- ▷ La suite (λ_n) converge vers un vecteur λ
- ▷ f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$

Autrement dit, on a interversion des limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Preuve:

- Montrons que la suite (λ_n) est de Cauchy de F .

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$, alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \varepsilon$$

L'application $\|\cdot\|_F$ est continue, on fait tendre x vers a on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|\lambda_n - \lambda_m\| \leq \varepsilon$$

Donc (λ_n) est de Cauchy dans F qui est Banach car de dimension finie. On déduit que la suite (λ_n) converge vers un élément λ de F .

- Montrons que f admet en a la limite λ .

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f(x) - \lambda\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - \lambda_n\|_F + \|\lambda_n - \lambda\|_F$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|b_n - b\|_F \leq \varepsilon$$

On en déduit :

$$\forall n \geq N, \quad \|f(x) - \lambda\|_F \leq 2\varepsilon + \|f_n(x) - \lambda_n\|_F$$

On prend $n = N$. On a $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda_N$, donc il existe un voisinage $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_A(a)$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{V} : \|f_N(x) - \lambda_N\| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathcal{V}$, alors

$$\|f(x) - \lambda\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - \lambda_N\| + \|\lambda_N - \lambda\| \leq 3\varepsilon.$$

D'où f admet une limite en a et on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$.

Corollaire 1 (Cas particulier)

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non bornée, on pose $a = \pm\infty$

Si :

- (f_n) converge uniformément sur A vers f .
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\lambda_n \in F$ en a .

Alors :

- ▷ La suite (λ_n) converge vers un vecteur λ
- ▷ f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$

Autrement dit, on a interversion des limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Remarque :

Pour appliquer le théorème d'interversion des limites il n'est pas nécessaire de vérifier la convergence uniforme de (f_n) sur A tout entier mais juste au voisinage de a .

Théorème 2

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F et $a \in \overline{A}$.

Si :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\lambda_n \in F$ en a

Alors :

- ▷ La série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n$ converge de somme λ
- ▷ La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet en a la limite λ .

On a l'interversion limite et somme :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Preuve:

On applique le théorème d'inversion limite-limite à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$

Corollaire 2 (Cas particulier)

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non bornée, on pose $a = \pm\infty$

Si :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\lambda_n \in F$ en a

Alors :

- ▷ La série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n$ converge de somme λ

▷ La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet en a la limite λ .

On a l'interversion limite et somme :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Exemple

Déterminer $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.

Puisque la série définissant ζ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, on peut appliquer le théorème d'interversion des limites, et on obtient

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$

Remarque :

On peut utiliser ce résultat pour montrer que la convergence n'est pas uniforme

Propriété 12

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de A vers F et $a \in \bar{A}$.

Si :

- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite $\lambda_n \in F$ en a
- ▷ La série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n$ diverge

Alors : $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur A

Preuve:

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A , alors La série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n$ converge puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite $\lambda_n \in F$ en a

Exemple

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Puisque

- $$\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ admet une limite finie } \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \text{ en } 1^+ \\ \circ \text{ La série numérique } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases}$$

Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$

III.2 Continuité et limite uniforme

Propriété 13: Continuité par convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F .

Si :

- ▷ (f_n) converge uniformément sur A vers f .
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $a \in A$ (resp sur A).

Alors : f est continue en a (resp sur A).

Preuve:

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur A vers f .

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $a \in A$. Autrement dit $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite en a qui est $f_n(a)$.

Donc, d'après le théorème d'interversion des limites, f admet une limite en a et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a)$$

On déduit que f est continue en a .

Propriété 14: Continuité par convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F .

Si :

- ▶ $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $a \in A$ (resp sur A).

Alors : la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a (resp sur A).

Preuve:

Appliquer le résultat précédent à $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$

III.3 Continuité par convergence uniforme sur tout compact**Lemme 1**

Soit (x_n) une suite d'éléments de E .

Si (x_n) converge vers un élément λ alors l'ensemble

$$K = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda\}$$

est une partie compacte de E .

Preuve:

On montre que K est une partie fermée et bornée de E .

Puisque (x_n) converge, la suite (x_n) est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$$

et en passant à la limite on a aussi $\|\lambda\| \leq M$.

On en déduit

$$\forall x \in K, \|x\| \leq M$$

et donc la partie K est bornée. Il reste à voir qu'elle est aussi fermée.

Considérons U le complémentaire de K . Soit $a \in U$ (et donc $a \notin K$).

On a $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ donc $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\lambda - a\| > 0$.

Posons $\alpha = \frac{\|\lambda - a\|}{2} > 0$. A partir d'un certain rang N , $\|x_n - a\| \geq \alpha$.

Posons alors $\alpha' = \min\{\|x_0 - a\|, \dots, \|x_{N-1} - a\|, \alpha\} > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| \geq \alpha'$$

et donc $K \cap \mathcal{B}(a, \alpha') = \emptyset$, ce qui signifie donc $\mathcal{B}(a, \alpha') \subset U$.

La partie U étant ouverte, la partie K est donc fermée et finalement compacte.

Propriété 15: Continuité par convergence uniforme sur tout compact

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F .

Si :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A .
- ▶ (f_n) converge uniformément sur tout compact de E inclus A vers f .

Alors : f est continue sur A .

Preuve:

Soit $a \in A$, montrons que f est continue en a .

Soit (x_n) une suite de $A^\mathbb{N}$ qui converge vers a , l'ensemble $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E inclus dans A , donc $f_n \xrightarrow[C]{CVU} f$ et $f_{n|_C}$ est continue sur C , donc $f|_C$ est continue sur C

$$\lim f(x_n) = \lim f_C(x_n) = f_C(a) = f(a)$$

Par la caractérisation séquentielle de la continuité on en déduit que f est continue en a

Remarque :

Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut remplacer compact par segment.

Propriété 16: Continuité par convergence uniforme sur tout compact

Soit (f_n) une suite de fonctions de A vers F .

Si :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A .
- ▶ $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout compact de E inclus A .

Alors : la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Exemple: Série de Newman

Soit $\mathbb{A}$ une algèbre normée de dimension finie dont l'unité est noté 1. Alors la fonction $\varphi : u \mapsto (1 - u)^{-1}$ est continue sur la boule ouverte $\mathcal{B}_o(O, 1)$.

Rappelons que pour tout $u \in \mathcal{B}_o(O, 1)$, $(1 - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

Pour tout $r \in]0, 1[$ la boule fermée $\mathcal{B}_f(O, r)$ est un compact de $\mathbb{A}$ inclus dans $\mathcal{B}_o(O, 1)$. Puisque la série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$ est convergente lorsque $r \in]0, 1[$, la majoration $\|u^n\| \leq r^n$, pour tout u tel que $\|u\| \leq r$, assure la convergence normale donc uniforme sur $\mathcal{B}_f(O, r)$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, avec $f_n : u \mapsto u^n$.

Comme il s'agit d'une série de fonctions continues, on en déduit que la fonction somme est continue sur $\mathcal{B}_f(O, r)$.

Puisque tout u de $\mathcal{B}_o(O, 1)$ admet un voisinage de la forme $\mathcal{B}_f(O, r)$ et la continuité étant une propriété locale, on obtient que φ est continue en u . Finalement, φ est continue sur $\mathcal{B}_o(O, 1)$

Exemple: L'exponentielle

Soit $\mathbb{A}$ une algèbre normée de dimension finie dont l'unité est noté 1. Alors $\exp$ est continue sur $\mathbb{A}$.

Par définition, on a $\forall u \in \mathbb{A}, \exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

Pour tout $R > 0$, on a $\forall u \in \mathcal{B}_f(O, R), \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}$.

Puisque $\frac{R^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, la majoration précédente assure la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n, f_n : u \mapsto \frac{u^n}{n!}$, sur toute boule fermée $\mathcal{B}_f(O, R)$

III.4 Complétude de $\mathcal{C}(A, F)$ **Propriété 17**

On suppose que A est compact.

L'espace $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach.

Preuve:

On a $\mathcal{C}(A, F) \subset \mathcal{B}(A, F)$ et $(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$ Banach, donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}(A, F)$ est fermé.

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}(A, F)$ qui converge vers f . On a $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ donc $f_n \xrightarrow{u} f$ et puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A donc f est continue sur A d'où $f \in \mathcal{C}(A, F)$. On déduit que $\mathcal{C}(A, F)$ est fermé dans $\mathcal{B}(A, F)$ Banach. Donc $\mathcal{C}(A, F)$ est un Banach.

Remarque :

La norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle aussi la norme de la convergence uniforme.

IV Intégration et dérivation

a et b désigne deux réels tels que $a < b$

IV.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme

Théorème 3: d'interversion lim et $\int$

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ vers F .

Si :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}([a, b], F)$.
- ▶ (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Alors :

- ▷ f est continue sur $[a, b]$
- ▷ La suite $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge
- ▷ On l'interversion limite et intégrale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$

Preuve:

- ▶ f est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues, on peut donc introduire $\int_a^b f(t) dt$
- ▶ Le résultat se déduit :

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right\| &\leq \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\| dt \\ &\leq (b-a) \|f - f_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Remarque :

1. La continuité des fonctions f_n n'est utile qu'à partir d'un certain rang
2. Dans le cadre de théorème, il y a permutation des opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ et $\int_a^b$

Propriété 18

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I, F)$ convergeant uniformément sur tout segment inclus dans I vers f . Pour $a \in I$, on pose $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$.

Alors la suite de fonctions (φ_n) converge uniformément vers φ sur tout segment inclus dans I

Preuve:

Soit S un segment inclus dans I , il existe $\alpha, \beta \in I$ tels que le segment $[\alpha, \beta]$ contient a et S . On a donc

$$\forall x \in S, \quad \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| \leq (\beta - \alpha) \|f - f_n\|_{\infty, [\alpha, \beta]}$$

Donc

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq (\beta - \alpha) \|f - f_n\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Propriété 19: Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ vers F .

Si :

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a, b], F)$.
- ▶ $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

- ▷ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue
- ▷ la série $\sum_{n \geq 0} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$ converge
- ▷ On l'interversion de la somme et l'intégrale : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$

Preuve:

Appliquer la propriété précédente à la suite des sommes partielles

Remarque :

Dans le cadre de théorème, il y a permutation des opérations $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_a^b$

Exemple

Montrons $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt = \gamma$, où $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ la constante d'Euler.

Introduisons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$. On a

$$\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ donc uniformément et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right) = \gamma \end{aligned}$$

Car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$$

Remarque :

On peut intervertir $\sum$ et $\int$ même si la convergence n'est pas uniforme

Attention

Ce théorème concerne exclusivement les intégrales sur un segment

Exemple

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}}$.

$\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ alors que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$ ne tend vers 0

IV.2 Dérivation et convergence uniforme

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 4

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$

Si :

- Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- (f'_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors :

- ▷ f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- ▷ $f'_n \xrightarrow[I]{CVS} f'$. Autrement dit, on a interversion limite-dérivée

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

- ▷ La suite (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Preuve:

Soit $a \in I$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

On a $f_n \xrightarrow{CVS} f$ donc $\forall x \in I, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

On a $\forall x \in I, f'_n \xrightarrow{CVU} g$ sur $[a, x]$ donc

$$\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt$$

Donc $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$.

On a $f'_n \xrightarrow{CVU} g$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f'_n$ est continue sur I donc g est continue sur I . On déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f' = g$ sur I .

Théorème 5: de la dérivation sous signe somme

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$

Si :

- Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .
- $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors :

- ▷ La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on peut dériver terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

- ▷ $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Preuve:

Appliquer sur la suite (S_n) des sommes partielles

Exemple

On rappelle que ζ la fonction de Riemann définie sur $I =]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

On montre que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

- $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I
- Soit $[a, b] \subset I$. Montrons que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. On a

$$f'_n(x) = \left(e^{-x \ln n} \right)' = \frac{-\ln n}{n^x}$$

Donc pour tout $x \in [a, b]$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a} = \alpha_n$$

La série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ converge car $a > 1$, donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $[a, b]$, donc elle l'est uniformément

Par le théorème de dérivation sous-signe somme ζ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$$

Propriété 20: Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$.

Si :

- Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \geq 0}$ converge simplement sur I .
- la suite $(f_n^{(p)})_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors :

- ▷ f la limite simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
- ▷ $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f_n^{(k)} \xrightarrow{CVU} f^{(k)}$ sur tout segment inclus dans I
- ▷ Autrement dit, on a les interversions

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$

Preuve:

Par récurrence sur p

- La propriété est vraie pour $p = 1$
- Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété vraie pour p . Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = f_n^{(p)}$, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I et la suite des dérivées (h'_n) , converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g . Donc, la suite (h_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I et sa limite h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$.
Il en résulte d'après l'hypothèse de récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I avec $f^{(p)} = h$ et que chaque suite $(f_n^{(j)})$ avec $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers $f^{(j)}$. Sachant que h est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $h' = g$, on en déduit enfin que f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I avec $f^{(p+1)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})$ avec $j \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket$, converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers $f^{(j)}$.
On a ainsi prouvé que la propriété est récurrente, et puisqu'elle est vraie pour $p = 1$, elle l'est aussi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Propriété 21: Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$.

Si :

- Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
- Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge simplement sur I .
- La série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors :

- ▷ La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
- ▷ Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

▷ On a l'interversion somme-dérivées successives :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

Preuve:

Appliquer sur la suite (S_n) des sommes partielles

Propriété 22: Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$.

Si :

- ▶ Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- ▶ La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers f
- ▶ Pour tout $p \geq 1$ la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors :

- ▷ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- ▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I
- ▷ On a l'interversion limite-dérivées successives :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$

Preuve:

Par récurrence

Théorème 6: Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I, F)$.

Si :

- ▶ Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- ▶ La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .
- ▶ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Alors :

- ▷ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- ▷ La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .
- ▷ On a les interversions somme-dérivées successives :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

Preuve:

Appliquer sur la suite (S_n) des sommes partielles

Exemple: Zéta de Riemann est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

On rappelle que ζ la fonction de Riemann définie sur $I =]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

On montre que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

- ▶ $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- ▶ $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I

- Soit $[a, b] \subset I$. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, b]$. On a

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

Donc pour tout $x \in [a, b]$

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a} = \alpha_n$$

La série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ converge car $a > 1$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$, donc elle l'est uniformément

Par le théorème de dérivation sous-signe somme ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \forall p \in \mathbb{N} \quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^{(p)}}{n^x}$$

Exemple: Zéta alternée de Riemann est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

On rappelle que μ la fonction zéta alternée de Riemann définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

- $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I
- Soit $[a, b] \subset I$. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, b]$. On a

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p-1} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

Pour tout $x \in [a, b]$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}(x)$ vérifiant le critère de Leibniz car $\left(\frac{\ln^p n}{n^x}\right)$ décroît à partir d'un certain rang et est de limite nulle par les croissances comparées. En outre

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a,b]} = \frac{\ln^p n}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, b]$

Par le théorème de dérivation sous-signe somme μ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall p \in \mathbb{N} \quad \mu^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{p+n-1} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

Propriété 23

Soit $\mathbb{A}$ une algèbre normée de dimension finie dont l'unité est noté 1 et $a \in \mathbb{A}$.

$$e_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{A} \\ t & \longmapsto \exp(ta) \end{cases}$$

e_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N} \quad e_a^{(p)}(t) = a^p \cdot e_a(t)$$

Preuve:

- $f_n : x \mapsto \frac{t^n a^n}{n!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
- $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car elle converge absolument. En effet

$$\|f_n(t)\| = \frac{\|t^n a^n\|}{n!} \leq \frac{(|t| \|a\|)^n}{n!}$$

et la SATP $\sum_{n \geq 0} \frac{(|t| \|a\|)^n}{n!}$

► Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, b]$. On a

$$f_n^{(p)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n-p)!} t^{n-p} a^n & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et n assez grand

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{(n-p)!} \delta^{n-p} \|a\|^n \text{ où } \delta = \max\{|\alpha|, |\beta|\} = a_n$$

La série à termes positifs $\sum_{n \geq p} a_n$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge normalement sur $[\alpha, \beta]$, donc elle l'est uniformément

Par le théorème de dérivation sous-signe somme e_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N} \quad e_a^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-p)!} t^{n-p} a^n = a^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-p)!} t^{n-p} a^{n-p} = a^p \cdot e_a(t)$$

V Approximations

V.1 Approximation par des fonctions en escalier

Propriété 24

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$, c'est-à-dire

$$\|f - \varphi_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve:

Commençons par le démontrer pour une fonction continue sur un segment.

► Si f est continue sur $[a, b]$, une telle fonction est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t, t' \in [a, b], |t - t'| < \eta \Rightarrow \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon.$$

Soit alors $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de pas plus petit que η et définissons $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ par $\varphi(a_i) = f(a_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\varphi(t) = f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)$ si $t \in]a_{i-1}, a_i[$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\|f(t) - \varphi(t)\|$ vaut 0 si t est l'un des a_i et $\left\|f(t) - f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)\right\| \leq \varepsilon$ si $t \in]a_{i-1}, a_i[$ puisque alors $\left|t - \frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right| < \delta(\sigma) < \eta$. On a bien une fonction φ en escalier telle que $\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$.

► Si maintenant f est continue par morceaux, soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f et soit $f_i : [a_{i-1}, a_i] \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^0$ telle que $\forall t \in]a_{i-1}, a_i[, f(t) = f_i(t)$. On peut appliquer le cas précédent à f_i et trouver φ_i en escalier telle que $\sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} \|f_i(t) - \varphi_i(t)\| \leq \varepsilon$. On définit alors une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ par $\varphi(a_i) = f(a_i)$ et $\varphi(t) = \varphi_i(t)$ si $t \in]a_{i-1}, a_i[$. Alors on a

$$\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} \|f_i(t) - \varphi_i(t)\| \right) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre le résultat. En fait, on peut montrer le résultat plus général suivant (que nous n'utiliserons pas par la suite)

Exemple: Le lemme de LEBESGUE

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$$

2. Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| &= \left| \frac{1}{\lambda} (-[\cos(\lambda t) f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt) \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt). \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2. Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f = 1$, car pour $\lambda > 0$, $\left| \int_a^b \sin(\lambda t) dt \right| = \dots \leq \frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \sin(\lambda t) dt + \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en escaliers,

$$\exists A > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda > A$, on a alors $\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda > A \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \varepsilon),$$

et donc que $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

V.2 Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Théorème 7

Toute application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Corollaire 3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t \in [a, b], \|f(t) - P(t)\| < \varepsilon$.

Exemple

Soit a, b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b x^n f(x) dx = 0$$

Montrer que f est nulle

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$\int_a^b P(x) f(x) dx = 0$$

La fonction $\bar{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est elle aussi continue sur $[a, b]$. Donc, d'après le premier théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $\bar{f}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, en écrivant

$$|f(x)|^2 - f(x)P_n(x) = \left| f(x) \left(\overline{f(x)} - P_n(x) \right) \right|$$

et il en résulte que la suite $(fP_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a, b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)P_n(x) dx$$

Donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[a, b]$ d'intégrale nulle, donc $|f| = 0$, ainsi la nullité de f

V.3 Deuxième théorème de Weierstrass**Définition 11**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. On dit que f est un polynôme trigonométrique, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(c_k)_{-n \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$$

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \end{cases}$, avec $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Alors f est un polynôme trigonométrique.

En effet, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \\ &= a_0 \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \quad \text{avec} \quad c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ a_0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & \text{si } k \in \llbracket -n, -1 \rrbracket \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 8: de Stone Weierstrass

Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.