

CONTEXTE

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$  où  $A \subset E$  avec  $E$  et  $F$  sont de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies.  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

MODES DE CONVERGENCE

Définition: Convergence simple

- On dit que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $A$  si pour tout  $x \in A$  la suite  $(f_n(x))$  converge dans  $F$ .
- On appelle limite simple de la suite  $(f_n)$ , la fonction  $f \in F^A$  définie par:  
 $\forall x \in A, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et on écrit  $f_n \xrightarrow[CVS]{A} f$

Définition: Convergence uniforme

On dit que la suite de fonction  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  si :

- Il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, f_n - f$  est bornée
- $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On note  $f_n \xrightarrow[CVU]{A} f$  ou  $f_n \xrightarrow{CVU} f$

Propriété: caractéristique

$$f_n \xrightarrow[CVU]{A} f \iff \begin{cases} \bullet f_n \xrightarrow[CVS]{A} f \\ \bullet \|f_n - f\|_\infty^A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \text{ telle que } \lim \varepsilon_n = 0 \\ \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n \quad \text{à pcr} \end{cases}$$

Propriété: La non convergence uniforme

Si  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tq  $(f_n(x_n) - f(x_n)) \not\rightarrow 0$ , alors  $f_n$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $A$

Propriété

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

DOUBLE LIMITES

Théorème: de la double limite

Soit  $a \in \overline{A}$ .

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \text{ existe et vaut } b_n \in F; \\ \circ f_n \xrightarrow[CVU]{A} f \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \text{ La suite } (b_n) \text{ converge;} \\ \bullet f \text{ admet une limite en } a; \\ \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{cases}$

Autrement-dit:  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$

CONTINUITÉ

Propriété: Continuité par convergence uniforme

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \text{ est continue sur } A; \\ \circ f_n \xrightarrow[CVU]{A} f. \end{cases}$

**Alors:**  $f$  est continue sur  $A$ .

Propriété: Continuité par convergence uniforme sur tout compact

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \text{ est continue sur } A; \\ \circ f_n \xrightarrow[CVU]{} f \text{ sur tout compact inclus dans } A. \end{cases}$

**Alors:**  $f$  est continue sur  $A$ .

Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on remplace compact par segment

INTERVERSION LIMITE ET INTÉGRALE

Théorème: d'interversion limite et intégrale

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $F$

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \text{ est continue sur le segment } [a, b]; \\ \circ (f_n) \text{ converge uniformément sur } [a, b] \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \lim f_n \text{ est continue sur } [a, b]; \\ \bullet \text{ La suite } \left( \int_a^b f_n \right)_n \text{ converge;} \\ \bullet \text{ On a l'interversion } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt \end{cases}$

Propriété: Convergence uniforme et primitivation

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues définie de  $I$  à valeurs dans  $F$ . de  $\mathcal{C}(I, F)$  telle que  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$  vers  $f$ . Pour tout  $a \in I$ , on pose

$$\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$$

Alors  $(\varphi_n)$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$  vers  $\varphi$

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉ

Théorème: de convergence dominée (Intervalle quelconque)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  telle que :

**Si:**  $\begin{cases} \circ \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K}); \\ \circ f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K}); \\ \circ \text{ il existe } \varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+) \text{ intégrable telle que:} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad [\text{hypothèse de domination}] \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \text{ Les applications } f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I; \\ \bullet \text{ La suite } \left( \int_I f_n \right) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f \end{cases}$

RÉGULARITÉ DE LA LIMITE

Théorème: d'interversion limite et dérivée. Classe  $\mathcal{C}^1$

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1(I, F); \\ \circ (f_n) \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ (f'_n) \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, F); \\ \bullet \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n; \\ \bullet (f_n) \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

Propriété: d'interversion limite et dérivée. Classe  $\mathcal{C}^p$

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \in \mathcal{C}^p(I, F); \\ \circ \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, (f_n^{(k)}) \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ (f_n^{(p)}) \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I; \\ \bullet \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, (f_n^{(k)}) \text{ CVU sur tout segment inclus dans } I; \\ \bullet \text{ On a les interversions} \end{cases}$

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$

Propriété: d'interversion limite et dérivée. Classe  $\mathcal{C}^\infty$

**Si:**  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N} \text{ (ou à pcr) } f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, F); \\ \circ \text{ La suite } (f_n) \text{ CS sur } I; \\ \circ \forall p \geq 1, (f_n^{(p)}) \text{ CVU sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$

**Alors:**  $\begin{cases} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I; \\ \bullet \forall k \geq 0, f_n^{(k)} \text{ CVU sur tout segment inclus dans } I; \\ \bullet \text{ On a les interversions} \end{cases}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$

CONTACT INFORMATION

**Web** www.elamdaoui.com  
**Email** elamdaoui@gmail.com  
**Phone** 06 62 30 38 81

CONTEXTE

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$  où  $A \subset E$  avec  $E$  et  $F$  sont de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies. Le plus souvent,  $E = F = \mathbb{R}$  et  $A = I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

On note, pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$

MODES DE CONVERGENCE

Définition: Convergence simple

On dit que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $A$ , si  $\forall x \in A$  la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  converge et  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est appelée sa somme.

Définition: Convergence absolue

On dit que  $\sum f_n$  converge absolument si la série de fonction  $\sum \|f_n\|_F$  converge simplement.

Définition: Convergence normale

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $\sum f_n$  converge normalement si la série numérique  $\sum \|f_n\|_{\infty}$  converge.

Propriété: caractéristique de la convergence normale

$\sum f_n$  converge normalement (cvn) sur  $A$  si, et seulement si,

- $\exists (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : \|f_n(x)\| \leq a_n$
- $\sum a_n$  converge

Propriété: caractéristique de la convergence uniforme

$\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement, si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$  et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \xrightarrow[A]{CVU} 0$

Propriété: Condition nécessaire

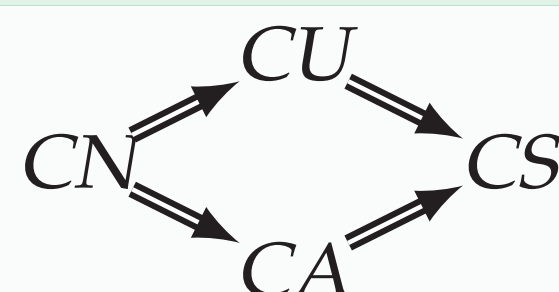
Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors  $f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$ .

Propriété: Cas d'une série alternée

On suppose que  $F = \mathbb{R}$ .

Si  $\forall x \in A$ , la série  $\sum f_n(x)$  est alternée vérifiant le CSSA, alors  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement, si  $f_n \xrightarrow[A]{CVU} 0$

Propriété: Comparaison des modes de convergence



Toutes les autres implications sont fausses.

INTERVERSION lim ET  $\sum$

Propriété: Interversion limite-somme

- Si:  $\begin{cases} \circ \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } A; \\ \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in F \text{ où } a \in \bar{A} \end{cases}$
- Alors:  $\begin{cases} \bullet \text{ La série } \sum_{n \geq 0} \ell_n \text{ converge;} \\ \bullet \text{ La somme } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ admet une limite en } a; \\ \bullet \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \end{cases}$

CONTINUITÉ

Propriété: Continuité par convergence uniforme sur tout compact

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(A, F); \\ \circ \sum f_n \text{ converge uniformément sur tout compact inclus dans } A. \end{cases}$
- Alors : la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $A$ .

Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on remplace compact par segment

INTERVERSION  $\sum$  ET  $\int$

Propriété: Intégration terme à terme sur un segment

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a, b], F); \\ \circ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b]. \end{cases}$
- Alors:  $\begin{cases} \bullet \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ est continue;} \\ \bullet \sum_{n \geq 0} \left( \int_a^b f_n \right) CV \text{ et on a: } \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right) \end{cases}$

Théorème: Convergence dominée (Intervalle quelconque)

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est continue par morceaux et intégrable;} \\ \circ \text{ La série } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ de somme } f; \\ \circ f \text{ est continue par morceaux sur } I; \\ \circ \text{ La série } \sum_{n \geq 0} \int_I |f_n| \text{ converge.} \end{cases}$
- Alors:  $\begin{cases} \bullet \text{ La fonction } f \text{ est intégrable sur } I; \\ \bullet \int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{cases}$
- En outre:  $\int_I |f| = \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$ .

RÉGULARITÉ DE LA LIMITE

Théorème: Dérivation terme à terme: Classe  $\mathcal{C}^1$

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, F); \\ \circ \text{ La série } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ \sum_{n \geq 0} f'_n \text{ converge uniformément sur tout segment inclus } I. \end{cases}$

Alors:

- $\begin{cases} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, F); \\ \bullet \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n; \\ \bullet \text{ La série } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment inclus } I \end{cases}$

Théorème: Dérivation terme à terme: Classe  $\mathcal{C}^p$

Soit  $p \geq 1$ .

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^p(I, F); \\ \circ \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} \text{ CS sur } I; \\ \circ \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur tout segment inclus dans } I. \end{cases}$
- Alors:  $\begin{cases} \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^p(I, F); \\ \bullet \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}; \\ \bullet \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur tout segment } \subset I \end{cases}$

Théorème: Dérivation terme à terme: Classe  $\mathcal{C}^{\infty}$

- Si:  $\begin{cases} \circ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^{\infty}(I, F); \\ \circ \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I; \\ \circ \forall p \geq 1, \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} \text{ converge uniformément sur tout segment } \subset I. \end{cases}$

Alors: la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $I$  et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}.$$

CONTACT INFORMATION

Web [www.elamdaoui.com](http://www.elamdaoui.com)  
Email [elamdaoui@gmail.com](mailto:elamdaoui@gmail.com)  
Phone 06 62 30 38 81