
Les intégrales paramétrées

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I	Intégrales généralisées	2
I.1	Intégrale sur un intervalle $[a, b[$	2
I.2	Intégrale sur un intervalle $]a, b]$	4
I.3	Intégrale sur un intervalle ouvert $]a, b[$	5
I.4	Intégrales de Riemann	5
II	Propriétés	6
II.1	Linéarité	6
II.2	Fonctions complexes	7
II.3	Positivité	8
III	Critère de convergence des fonctions positives	9
III.1	Critère de majoration	9
III.2	Critère de comparaison	9
III.3	Comparaison série intégrale	10
IV	Intégrabilité	11
IV.1	Intégrabilité	11
IV.2	Intégrabilité par comparaison	12
IV.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz	13
V	Règles de Riemann	13
V.1	Règles de Riemann en $+\infty$	13
V.2	Règles de Riemann en 0	15
V.3	Règles de Riemann en un point	15
VI	Calcul pratique des intégrales généralisées	16
VI.1	Changement de variable	16
VI.2	Intégration par parties	17
VII	Somation des relations de comparaison	17

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

I Intégrales généralisées

I.1 Intégrale sur un intervalle $[a, b[$

Définition 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une application **continue par morceaux** sur $[a, b[$.

On dit que l'**intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ converge** si la fonction **intégrale partielle**

$$F : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

admet une limite finie en b . Auquel cas on définit la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_b F(x) = \lim_b \int_a^x f(t) dt$$

elle est aussi notée : $\int_{[a, b[} f$ ou $\int_a^b f$.

Si l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Exemple: Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$

Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exemple: Étude de $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$

Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$.

La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^x \sin(t) dt = 1 - \cos(x),$$

or cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$ d'où $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge

Propriété 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans un tel cas

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \begin{cases} x & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

- Si $\lambda = 0$, alors $\int_0^x e^{-\lambda t} dt = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc elle diverge.
- Si $\lambda < 0$, alors $\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda}$, donc elle converge.
- Si $\lambda > 0$, alors $\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

□

Définition 2

Deux intégrales généralisées sont dites **de même nature** si, et seulement, si elles sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes

Propriété 2: Localisation

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une application continue par morceaux sur $[a, b[$ et $c \in]a, b[$.

Alors les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.

Lorsqu'elles convergent on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

De plus

$$\int_c^b f(t) dt \xrightarrow{c \rightarrow b} 0$$

Démonstration. Pour $x \in [a, b[$, on a

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$$

donc une intégrale partielle converge si, et seulement si, l'autre converge aussi. En cas de convergence

$$\int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \xrightarrow{c \rightarrow b} 0$$

□

I.2 Intégrale sur un intervalle $]a, b]$

Définition 3

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$, $a < b$, $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une application **continue par morceaux** sur $]a, b]$.

On dit que **l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ converge** si la fonction **intégrale partielle**

$$G : \begin{cases}]a, b] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longmapsto \int_x^b f(t) dt \end{cases}$$

admet une limite finie en a . Auquel cas on définit la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_a G(x) = \lim_a \int_x^b f(t) dt$$

elle est aussi notée : $\int_{]a, b]} f$ ou $\int_a^b f$.

Si l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Exemple: Étude de $\int_0^1 \ln(t) dt$

Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$.

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1 = -1 + x - x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$$

Ainsi $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$.

Exemple: Étude de $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$

Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$.

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Propriété 3

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue par morceaux sur $]a, b]$ et $c \in]a, b]$.

Alors les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature.

Lorsqu'elles convergent on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

De plus

$$\int_a^c f(t) dt \xrightarrow{c \rightarrow a} 0$$

Démonstration. Pour $x \in]a, b]$, on a

$$\int_x^b f = \int_x^c f + \int_c^b f$$

donc une intégrale partielle converge si, et seulement si, l'autre converge aussi. En cas de convergence

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_c^b f(t) dt \xrightarrow{c \rightarrow a} 0$$

□

I.3 Intégrale sur un intervalle ouvert $]a, b[$

Définition 4

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si on a les conditions équivalentes

1. Il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent
2. Pour tout $c \in]a, b[$, les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent
3. L'application $(x, y) \mapsto \int_x^y f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers a et y tend vers b indépendamment l'un de l'autre.

En cas de convergence, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \int_x^y f(t) dt.$$

Démonstration. Découle immédiatement de la relation de Chasles. □

Remarque :

L'étude d'une intégrale généralisée revient à étudier une intégrale ou deux intégrales sur des intervalles semi-ouverts

I.4 Intégrales de Riemann

Théorème 1: Riemann en $+\infty$

Soit α un réel. Alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge si, et seulement si, } \alpha > 1$$

Dans un tel cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Soit alors $x \in [1, +\infty[$

► Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1)$

▷ Si $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} = 0$ d'où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$

- ▷ Si $\alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$ d'où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$
- ▶ Si $\alpha = 1$, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

□

Théorème 2: Riemann en 0

Soit α un réel. Alors

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 1$$

Dans un tel cas

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration. La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$ donc elle est continue par morceaux sur $]0, 1]$. Soit alors $x \in]0, 1]$

- ▶ Si $\alpha \neq 1$, $\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha})$
- ▷ Si $\alpha > 1$, $\lim_{0^+} x^{1-\alpha} = +\infty$ d'où $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge
- ▷ Si $\alpha < 1$, $\lim_{0^+} x^{1-\alpha} = 0$ d'où $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$
- ▶ Si $\alpha = 1$, $\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ d'où $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge

□

Propriété 4: Riemann en un point

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

- $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$
- $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$

II Propriétés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

II.1 Linéarité

Théorème 3

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, f, g deux applications continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent, alors $\int_I (f + \lambda g)(t) dt$ converge et on a :

$$\int_I (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \int_I g(t) dt$$

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $x \in [a, b[$, on a

$$\int_a^x (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt$$

Comme $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_I f(t)dt$ et $\int_a^x g(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_I g(t)dt$, donc

$$\int_a^x (\lambda f + g)(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \lambda \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt$$

Ainsi $\int_I (\lambda f + g)(t)dt$ converge et

$$\int_I (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt$$

□

Remarque :

1. On n'utilise pas la linéarité d'une intégrale généralisée avant d'avoir établi la convergence des intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$. En effet il y a un risque de **décomposer une intégrale généralisée convergente en une somme de deux intégrales généralisées divergentes**.
2. Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent on ne peut pas conclure que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Exemple

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge et } \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \text{ diverge}$$

II.2 Fonctions complexes

Théorème 4: Conjugaison

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux I . Alors

$$\int_I f(t)dt \text{ converge si, et seulement, si } \int_I \overline{f(t)}dt \text{ converge.}$$

En cas de convergence

$$\overline{\int_I f(t)dt} = \int_I \overline{f(t)}dt$$

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $c \in [a, b[$, on a

$$\overline{\int_a^x f(t)dt} = \int_a^x \overline{f(t)}dt$$

Donc les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b \overline{f(t)}dt$ sont de même nature. En cas de convergence

$$\overline{\int_a^b f(t)dt} = \int_a^b \overline{f(t)}dt$$

□

Théorème 5: Conjugaison

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux I . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $\int_I f$ converge.
2. $\int_I \Re f$ et $\int_I \Im f$ convergent

En cas de convergence

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$$

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b]$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^x f = \int_a^x \operatorname{Re} f + i \int_a^x \operatorname{Im} f$$

Donc l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_a^b \operatorname{Re} f$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f$ convergent. En cas de convergence

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$$

□

Exemple: Convergence et calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-t} dt$

Calculons la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt$.

Introduisons $\int_0^{+\infty} e^{(i\omega-1)t} dt$. L'application $t \mapsto e^{(i\omega-1)t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^x e^{i\omega t} e^{-t} dt = \int_0^x e^{(i\omega-1)t} dt = \left[\frac{e^{(i\omega-1)t}}{i\omega-1} \right]_0^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-i\omega} = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{(i\omega-1)t} dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-t} dt$ convergent de valeurs

$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-t} dt = \frac{1}{1+\omega^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-t} dt = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

II.3 Positivité

Théorème 6: Positivité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur I .

Si $\int_I f(t) dt$ converge et f est positive sur I , alors $\int_I f(t) dt \geq 0$

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b]$. Soit $c \in [a, b]$, la fonction f est positive sur $[a, c]$, donc $\int_a^c f(t) dt \geq 0$, et par passage à la limite lorsque c tend vers b , on obtient $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ □

Théorème 7: Croissance

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux sur I .

Si $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent et $f \leq g$ sur I , alors $\int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt$

Démonstration. $g - f$ est continue par morceaux et positive sur I et $\int_I (g - f)$ converge, donc par linéarité et positivité de l'intégrale, on obtient $\int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt$ □

Propriété 5

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive telle que $\int_I f$ converge et $\int_I f = 0$ alors $f = 0$ sur I

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b]$. Soit $c \in [a, b]$, on a

$$0 \leq \int_a^c f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt = 0;$$

on en déduit que $\int_a^c f(t)dt = 0$ d'où on en déduit que $\forall t \in [a, c] : f(t) = 0$ soit en particulier $f(c) = 0$. $\square$

III Critère de convergence des fonctions positives

Dans cette section $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$

III.1 Critère de majoration**Théorème 8: Majoration**

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux $[a, b[$.

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \text{ tel que } \forall x \in [a, b[\quad \int_a^x f(t)dt \leq M$$

Démonstration. Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $f \geq 0$ alors F est croissante sur $[a, b[$.

$\int_a^b f(t)dt$ converge équivaut à F admet en b une limite finie ; puisque F est croissante, cela équivaut à F est majorée $\square$

III.2 Critère de comparaison**Théorème 9: Théorème de comparaison**

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur I telles que $f \leq g$ sur I .

1. Si $\int_I g$ converge alors $\int_I f$ converge et $\int_I f \leq \int_I g$
2. Si $\int_I f$ diverge alors $\int_I g$ diverge

Démonstration. On prouve le résultat lorsque $I = [a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Supposons $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors pour tout $x \in [a, b[$, on a

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt,$$

d'où $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée, du théorème 8 on en déduit la convergence de l'intégrale généralisée

$\int_a^b f(t)dt$. Par le théorème 2 on en déduit la convergence de $\int_a^b f(t)dt$

2. se déduit de 1 par contraposition $\square$

Exemple: Intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Étudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Les deux fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ donc continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad e^{-t^2} \leq e^{-t}$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge puis $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge

Théorème 10: Domination

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b[$.

1. Si $f(t) = O_b(g(t))$ et $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge
2. Si $f(t) = o_b(g(t))$ et $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge

Démonstration. 1. Supposons que $f(t) = O_b(g(t))$ alors il existe $c \in [a, b[$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$t \in [c, b[\Rightarrow f(t) \leq M \cdot g(t)$$

comme $\int_c^b g(t) dt$ converge, d'après le théorème de comparaison 9 on en déduit que $\int_c^b f(t) dt$ converge

ainsi que $\int_a^c f(t) dt$ converge

2. Si $f = o(g)$ alors $f = O(g)$

□

Théorème 11: Domination

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que

$$f(t) \sim_b g(t)$$

alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ et } \int_a^b f(t) dt \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration. Si $f(t) \sim_b g(t)$ alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$, donc $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature

□

III.3 Comparaison série intégrale

Théorème 12

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$, d'où $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) \leq \int_0^N f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$$

soit $\sum_{n=0}^N f(n) - f(0) \leq \int_0^N f(x)dx \leq \sum_{n=0}^N f(n)$.

- Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\sum_{n=0}^N f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx + f(0)$ du théorème de majoration pour les séries à termes positifs. On en déduit que $\sum f(n)$ converge
- Si $\sum f(n)$ converge alors $\int_0^N f(x)dx \leq \sum_{n=0}^N f(n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$, du théorème de majoration 8 l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge

□

Exemple

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $\int_1^\alpha \frac{1}{x^\alpha} dx$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature

IV Intégrabilité

IV.1 Intégrabilité

Définition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux I alors $|f|$ est continue par morceaux I .

On dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente ou f est intégrable sur I si, et seulement, si $\int_I |f(t)|dt$ est convergente

Théorème 13

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux I .

Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f(t)dt$ est convergente et

$$\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt$$

Démonstration.

- Lorsque f est positive, rien à démontrer.
- Lorsque f est réelle. On considère les deux applications

$$f^+ : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \max(f(x), 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f^- : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \max(-f(x), 0) \end{cases}$$

Ces deux applications sont continues par morceaux et positives sur I et elles vérifient

$$|f| = f^+ + f^- \quad \text{et} \quad f = f^+ - f^-$$

Donc $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. Donc les deux intégrales $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent puis, par opérations algébriques $\int_I f$ converge et

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$$

En outre

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|$$

- Lorsque f est complexe. On écrit $f = \Re f + i \Im f$. Les deux applications $\Re f$ et $\Im f$ sont continues par morceaux sur I . Puisque $|\Re f|, |\Im f| \leq |f|$, on a, par comparaison de fonctions positives, les intégrales $\int_I |\Re f|$ et $\int_I |\Im f|$ convergent donc $\int_I \Re f$ et $\int_I \Im f$ convergent puis par opérations $\int_I f$ converge aussi. Enfin, par inégalité triangulaire des intégrales sur un segment, on obtient

$$\left| \int_I f \right| = \int_I |f|$$

□

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux I

Si $\int_I f$ converge et $\int_I |f|$ diverge on dit que $\int_I f$ est semi-convergente

Exemple: L'intégrale de Dirichlet

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

- La fonction $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle est continue par morceaux $[1, +\infty[$.

À l'aide d'une intégration par parties on écrit :

$$\forall x \geq 1 \quad \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow{+\infty} 0$ et $\frac{\cos t}{t^2} \xrightarrow{+\infty} 0$ et $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge ainsi que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

- La fonction $x \rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc elle est continue par morceaux $[1, +\infty[$.

$$\forall x \geq 1 \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

par une méthode analogue on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ converge. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ diverge alors

$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge

IV.2 Intégrabilité par comparaison

Théorème 14: Domination

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur I .

Si $|f| \leq g$ sur I et $\int_I g(t) dt$ converge alors f est intégrable sur I .

Théorème 15: Domination

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b[$.

Si $f(t) = O(g(t))$ ou $f(t) = o(g(t))$ et $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge

Théorème 16: Domination

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b]$.

Si

$$f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$$

alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ et } \int_a^b f(t) dt \text{ sont de même nature.}$$

IV.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz**Théorème 17: Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux sur I . Si $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ convergent alors $\int_I f \cdot g$ est absolument convergente et

$$\left(\int_I f \cdot g \right)^2 \leq \int_I f^2 \int_I g^2$$

Démonstration. En développant $(|f| - |g|)^2 \geq 0$ on déduit que $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ ce qui assure la convergence absolue de $\int_a^b f(t)g(t)dt$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un segment, on obtient, par passage à la limite aux bornes de I

$$\left(\int_I f \cdot g \right)^2 \leq \int_I f^2 \int_I g^2$$

□

Théorème 18

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I telles que $\int_I f^2$ et $\int_I g^2$ convergent, alors

$$\left(\int_I f \cdot g \right)^2 = \int_I f^2 \int_I g^2 \Leftrightarrow (f, g) \text{ est liée}$$

Démonstration. Utiliser le théorème 6

□

V Règles de Riemann**V.1 Règles de Riemann en $+\infty$** **Théorème 19**

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{t^\alpha}$, alors

f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$

Démonstration. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{t^\alpha}$, alors $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|\lambda|}{t^\alpha}$, donc les deux intégrales $\int_c^{+\infty} |f(t)| dt$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature où $c \geq \max(a, 1)$

□

Théorème 20

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$

Démonstration. Supposons $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors il existe $c \geq \max(a, 1)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t \geq c &\Rightarrow 0 \leq t^\alpha |f(t)| \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq |f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha} \end{aligned}$$

Or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge, du théorème de comparaison on en déduit que $\int_c^{+\infty} |f(t)| dt$ converge □

Théorème 21

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tels que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge

Démonstration. Supposons $\alpha \leq 1$ et $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ alors il existe $\ell > 0, c > \max(a, 1)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t \geq c &\Rightarrow t^\alpha f(t) \geq \ell \\ &\Rightarrow f(t) \geq \ell \frac{1}{t^\alpha} \end{aligned}$$

Or $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge, du théorème de comparaison on en déduit que $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ diverge. □

Exemple: Intégrales de Bertrand

Soit α et β deux réels. Étudions la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$.

l'application $x \rightarrow \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est positive continue sur $[2, +\infty[$ donc elle est continue par morceaux $[2, +\infty[$

- Si $\alpha > 1$ on pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$; alors $\gamma > 1$

$$\lim_{+\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} = 0.$$

Par la règle de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ converge

- Si $\alpha < 1$ alors $\gamma > 1$

$$\lim_{+\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \lim_{+\infty} \frac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$$

Par la règle de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ diverge

- Si $\alpha = 1$. Soit $x \in [2, +\infty[$, on effectue le changement de variable $u = \ln t$, alors

$$\int_2^x \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta} du$$

Or l'intégrale $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$ converge si, et seulement, si $\beta > 1$ d'où le résultat

On conclut que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

V.2 Règles de Riemann en 0

Théorème 22

Soit $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]0, a]$ où $a > 0$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{\lambda}{t^\alpha}$, alors

f est intégrable sur $]0, a]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$

Démonstration. Même méthode que le théorème 19 □

Théorème 23

Soit $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]0, a]$ où $a > 0$.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, alors f est intégrable sur $]0, a]$

Théorème 24

Soit $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et positive sur $]0, a]$ où $a > 0$.

S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$, alors $\int_0^a f(t) dt$ diverge

Exemple: Intégrales de Bertrand en 0

Soit α et β deux réels. Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt$.

► Si $\alpha > 1$, soit γ tel que $\alpha > \gamma > 1$. On a

$$t^\gamma \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} |\ln t|^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

Par la règle de Riemann, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{e}]$

► Si $\alpha < 1$, soit γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. On a

$$t^\gamma \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{|\ln t|^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Par la règle de Riemann, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} |\ln t|^\beta}$ n'est pas intégrable sur $]0, \frac{1}{e}]$

► Si $\alpha = 1$. Soit $x \in]0, \frac{1}{e}]$, par le changement de variables $u = -\ln t$ conduit à

$$\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t |\ln t|^\beta} dt = \int_1^{-\ln x} \frac{1}{u^\beta} du$$

qui admet une limite quand x tend vers 0 si, et seulement, si $\beta > 1$. En définitive,

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

V.3 Règles de Riemann en un point

Théorème 25

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \sim \frac{\lambda}{(t-a)^\alpha}$, alors

f est intégrable sur $]a, b]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$

Démonstration. Même méthode que le théorème 19 □

Théorème 26

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $(t-a)^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a^+} 0$, alors f est intégrable sur $]a, b]$.

Théorème 27

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $(t-a)^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a^+} +\infty$, alors $\int_a^b f(t) dt$ diverge

VI Calcul pratique des intégrales généralisées**VI.1 Changement de variable****Théorème 28: Changement de variable**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux I et $\varphi : J \rightarrow I$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de J vers I . Alors les intégrales généralisées $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ et $\int_I f(t) dt$ sont de même nature. Si elles convergent on a :

$$\int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)| dt = \int_I f(t) dt$$

Démonstration. □

Exemple

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

1. On va justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$. Au voisinage de 0, on a l'équivalence

$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} \sim_0 \frac{\ln t}{a^2}$$

et on sait que $\ln t$ est intégrable en 0. De même, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{\ln t}{a^2+t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$. Le changement de variables $u = 1/t$ donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-1}{u^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.

2. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variables $t = au$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln au}{a^2 + a^2 u^2} a du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{a^2(1+u^2)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{a^2(1+u^2)} du. \end{aligned}$$

Utilisant le calcul précédent et le fait qu'une primitive de $\frac{1}{1+u^2}$ est $\arctan u$, on trouve finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

VI.2 Intégration par parties

Théorème 29

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $u.v$ admette des limites finies aux extrémités a et b de I .

Alors les deux intégrales $\int_I u'v$ et $\int_I u.v'$ sont de même nature. En cas de convergence

$$\int_I u.v' = [uv]_a^b - \int_I u'.v$$

où $[uv]_a^b = \lim_b uv - \lim_a uv$.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudions et calculons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

- $x \rightarrow x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge
 - $\forall x > 0 \quad \int_0^x t^n e^{-t} dt = \left[e^{-t} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x + \int_0^x e^{-t} \frac{t^{n+1}}{n+1} dt$
- $\lim_{+\infty} e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, d'où $I_{n+1} = (n+1)I_n$ or $I_0 = 1$ alors $I_n = n!$

VII Sommation des relations de comparaison

Théorème 30

Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a, b[$.

1. Supposons $f(t) = O(g(t))$. Alors

- a) Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ **converge** et $\int_a^b f(t) dt = \mathcal{O}\left(\int_a^b g(t) dt\right)$
- b) Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, on ne peut pas conclure et on a $\int_a^x f(t) dt = \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t) dt\right)$

2. Supposons $f(t) = o_b(g(t))$. Alors

a) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ **converge** et $\int_a^b f(t)dt = o_b\left(\int_a^b g(t)dt\right)$

b) Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, on ne peut pas conclure et on a $\int_a^x f(t)dt = o_b\left(\int_a^x g(t)dt\right)$

3. Si $f(t) \sim_b g(t)$ alors $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature

a) Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt \sim_b \int_a^b g(t)dt$

b) Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^x f(t)dt \sim_b \int_a^x g(t)dt$

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{e^{-x^2}}{2x}$, puis montrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

$e^{-t^2} = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, on déduit que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

La dérivée de $x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{2x}$ étant $x \mapsto -e^{-x^2} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)$, il vient :

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) dt$$

L'équivalence $e^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right)$ donne le résultat

Exemple

Montrer que

$$\int_e^x \frac{dt}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

En remarquant que $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, alors la non intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[e, +\infty[$ entraîne celle de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$.

La dérivée de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln^2 t}$, on en déduit :

$$\forall x \geq e, \quad \frac{x}{\ln x} = e + \int_e^x \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln^2 t}\right) dt$$

L'équivalence en $+\infty$ des fonctions $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ et $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln^2 t}$ donne

$$\int_e^x \frac{1}{\ln t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x} - e \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_e^x \frac{1}{\ln t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$