

CONVERGENCE DOMINÉE

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques définies sur I

Théorème: Convergence dominée pour les suites

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux;
- $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I ;
- il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors les applications f_n et f sont intégrables sur I , la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$

Théorème: Convergence dominée pour les séries

Si:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ cvs sur I de somme f continue par morceaux sur I ;
- La série $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et on a: $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

CONTINUITÉ PAR DOMINATION GLOBALE

Soit $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$ où $A \subset E$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Souvent $E = \mathbb{R}$ et A intervalle de $\mathbb{R}$

Propriété

Si:

- $\forall t \in I, x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- $\forall x \in A, t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\forall x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et

$$F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A$$

φ ne dépend pas de x

Propriété: Cas d'un segment $I = [a, b]$

Soit $f : A \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

Alors $F : x \in A \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .

CONTINUITÉ PAR DOMINATION LOCALE

Propriété

Soit $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$ où $A \subset E$ avec E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, telle que:

- $\forall t \in I, x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- $\forall x \in A, t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Pour tout compact $\mathcal{C}$ contenu dans A , il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in \mathcal{C} \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\forall x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et

$$F : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A$$

- φ ne dépend pas de x
- Lorsque A intervalle de $\mathbb{R}$, on remplace $\mathcal{C}$ par $[a, b]$

DÉRIVATION SOUS SIGNE $\int$ - CLASSE $\mathcal{C}^1$

I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides

Propriété: Dérivation sous le signe $\int$

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que:

- $\forall x \in J, t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- f admet sur $J \times I$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue par rapport à la première variable et continue par morceaux par rapport à la seconde
- Pour tout $[a, b]$ contenu dans J , il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (\text{Formule de Leibniz})$$

φ ne dépend pas de x

Propriété: Cas d'un segment

Soit $f : J \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J \times [a, b]$.

Alors $F : x \in J \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J

DÉRIVATION SOUS SIGNE $\int$ - CLASSE $\mathcal{C}^n$

Propriété: Classe $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ tels que:

- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\forall x \in J$, l'application $t \longmapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ qui est continue par rapport à la première variable et continue par morceaux par rapport à la seconde
- Pour tout $[a, b] \subset J$, il existe $\varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

φ_n ne dépend pas de x

DÉRIVATION SOUS SIGNE $\int$ - CLASSE $\mathcal{C}^\infty$

Propriété: Classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que:

- Pour tout $x \in J, t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f admet une dérivée partielle $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde
- Pour tous $[a, b] \subset J$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue par morceaux et intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_n(t)$$

Alors $F : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, F^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt$$

φ_n ne dépend pas de x

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com

Email elamdaoui@gmail.com

Phone 06 62 30 38 81