
Les séries entières

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I Rayon de convergence d'une série entière	2
I.1 Série entière	2
I.2 Rayon de convergence	2
I.3 Propriétés caractéristiques	4
II Règles de Calcul	5
II.1 Calcul du rayon de convergence à l'aide des suites	5
II.2 Calcul du rayon de convergence à l'aide des séries	6
II.3 Invariance par multiplication par n^α	6
II.4 Règle de D'Alembert	7
II.5 Avec les relations de comparaison	8
III Opérations sur les séries entières	8
IV Somme d'une série entière	10
IV.1 Somme d'une série entière complexe	10
IV.2 Somme d'une série entière réelle	11
V Développement en série entière	13
V.1 Fonctions réelles développables en séries entières	13
V.2 Développement en série entière par dérivation et intégration	17
V.3 Par opérations algébriques	20
V.4 Équations différentielles	21

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Rayon de convergence d'une série entière

I.1 Série entière

Définition 1

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série entière associée à la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- Les nombres a_n s'appellent coefficients de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.
- Le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge}\}$$

- L'application $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelée la somme de la série

Remarque :

1. Si $(a_n)_{n \geq n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un rang $n_0 > 0$, on ajoute $a_0 = \dots = a_{n_0-1} = 0$
2. Le domaine de convergence d'une série entière n'est jamais vide. En fait, il contient 0.

Exemple

$\sum_{n \geq 0} z^n$ est une série entière de domaine $\mathcal{B}(0, 1)$ et de somme $S : z \longmapsto \frac{1}{1-z}$

Exemple: Série lacunaire

$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ est une série entière avec

$$\begin{cases} a_{2n} = \frac{1}{n+1} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

Vocabulaire :

1. Si la variable z est complexe alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est dite aussi série entière complexe.
2. Lorsque la variable z est réelle alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est dite série entière réelle et on la note $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ au lieu de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Si de plus les coefficients sont réels alors la série entière est dite série entière réelle à valeurs réelles.

I.2 Rayon de convergence

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Lemme 1 (d'Abel)

On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ soit bornée pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve:

La suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée donc $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. On peut écrire

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$$

On a $0 \leq \frac{|z|}{|z_0|} < 1$ donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$ converge d'où, par le critère de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Théorème 1

L'ensemble des réels r positifs tels que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ l'élément

$$R = \sup\{r \geq 0 / \text{la suite } (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Preuve:

Si $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée, et si $0 \leq s < r$, alors la série de terme général $a_n s^n$ converge (absolument), donc la suite $(a_n s^n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 et est donc bornée.

Remarque :

Soit $I = \{r \geq 0 / \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

- Si I est majoré, alors I admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^+$
- Si I n'est pas majoré $R = \sup I = +\infty$
- I est un intervalle de la forme $[0, R]$ ou $[0, R[$

Exemple

1. Soit la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. On a $\forall r \in \mathbb{R}^+, \left(\frac{r^n}{n!}\right)$ est borné, donc $R = +\infty$.
2. Soit la série $\sum_{n \geq 0} z^n$. On a $\forall r \in \mathbb{R}^+, (r^n)$ est borné si, et seulement si, $r \leq 1$, donc $R = 1$.

Propriété 1

1. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$, $\sum_{n \geq 0} |a_n| x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n z^n$ avec $\lambda \neq 0$ ont même rayon de convergence.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n \geq k} a_n z^{n-k}$ et avec $\sum_{n \geq 0} a_n z^{n+k}$ ont même rayon de convergence.

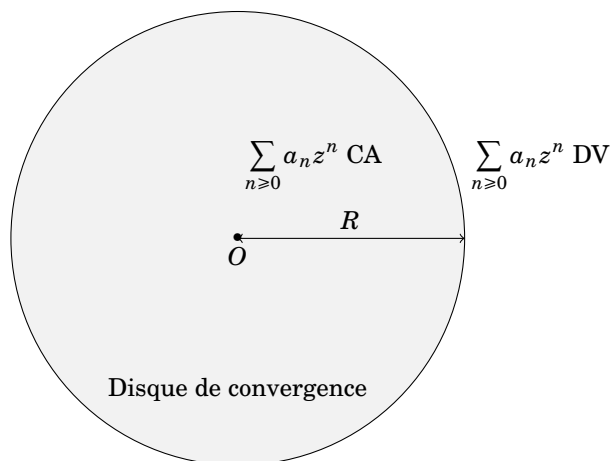
Propriété 2

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

1. Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $R = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée; en particulier, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.
3. Si $R \in]0, +\infty[$:
 - (a) Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
 - (b) Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
 - (c) Pas de règle générale de convergence ou de divergence lorsque $|z| = R$ pour la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Preuve:

1. Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \geq 0$ tel que $r > |z|$ et $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Pour tout $z \neq 0$, la suite $(a_n |z|^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée (définition du rayon de convergence)
3. (a) On a $|z| < R$ donc $\exists r > 0$ tel que $|z| < r < R$.
On a $r < R$ donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Or $|z| < r$ donc, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente. En particulier, convergente.
- (b) Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée donc $a_n z^n \not\rightarrow 0$ d'où la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

**Exemple: Cercle d'incertitude**

Soit $\sum_{n \geq 1} z^n$, $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$

1. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} z^n$ est $R = 1$ et la série diverge en tout point z de module 1
2. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est $R = 1$ et la série converge en tout point z de module 1
3. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$ et la série converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$

I.3 Propriétés caractéristiques**Propriété 3: Caractéristique du rayon**

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors :

1. $R = \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument} \right\}$
2. $R = \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$
3. $R = \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n = 0 \right\}$
4. $R = \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$

Preuve:*Posons*

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} |a_n| |z|^n \text{ converge} \right\} \\
 R_2 &= \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\} \\
 R_3 &= \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n = 0 \right\} \\
 R_4 &= \sup \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}
 \end{aligned}$$

il est facile de montrer que $R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_4$.

Soit $r < R_4$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$. Soit $\rho \in]r, R_4[$, alors la suite $(a_n \rho^n)_{n \geq 0}$ est bornée et d'après le lemme d'Abel la série

$\sum_{n \geq 0} |a_n| |z|^n$ converge, donc $r \leq R_1$, ainsi $R_4 \leq R_1$

Corollaire 1

Caractéristique du rayon Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors :

1. $R = \inf \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ ne converge pas absolument} \right\}$
2. $R = \inf \left\{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ diverge} \right\}$
3. $R = \inf \{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_n z^n \not\rightarrow 0 \}$
4. $R = \inf \{ |z|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \}$

II Règles de Calcul

II.1 Calcul du rayon de convergence à l'aide des suites

Propriété 4: Par limite

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R :

1. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $r \leq R$.
2. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_n r^n \not\rightarrow 0$ alors $r \geq R$.

Propriété 5: Par bornitude

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R :

1. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors $r \leq R$
2. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée, alors $r \geq R$

Exemple

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$?

La suite $(\sin n)$ diverge et est bornée, donc le rayon vaut 1.

II.2 Calcul du rayon de convergence à l'aide des séries

Propriété 6

Soit une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R et $u \in \mathbb{C}$.

1. Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ converge alors $|u| \leq R$.
2. Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ diverge alors $|u| \geq R$.
3. Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ est semi-convergente alors $R = |u|$.

Preuve:

1. La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ converge donc $a_n |u|^n \rightarrow 0$ d'où $|u| \leq R$.

Supposons que $|u| < R$ donc $\exists r > 0$ tel que $|u| < r < R$.

On a $r < R$ donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Or $|u| < r$ donc, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ est absolument convergente. En particulier, convergente. Ce qui est absurde, d'où $|u| \geq R$.

2. La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ est semi-convergente donc convergente d'où $|u| \leq R$.

3. La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$ est semi-convergente donc la série numérique $\sum_{n \geq 0} |a_n| |u|^n$ est divergente d'où $|u| \geq R'$ où R' est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$.

Or, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence donc $|u| \geq R$.

On déduit que $R = |u|$.

II.3 Invariance par multiplication par n^α

Propriété 7

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a_n z^n$ est de rayon de convergence R .

Preuve:

Posons R_α le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a_n z^n$.

- Soit $\rho < R_\alpha$ et soit $r \in]\rho, R_\alpha[$. On a

$$a_n \rho^n = n^{-\alpha} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot a_n n^\alpha r^n$$

Or $a_n n^\alpha r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $r < R_\alpha$ et par les croissances comparées $n^{-\alpha} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On déduit que $R_\alpha \leq R$.

- Soit $\rho < R$ et soit $r \in]\rho, R[$. On a

$$a_n n^\alpha \rho^n = n^\alpha \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cdot a_n r^n$$

Or $a_n n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $r < R$ et par les croissances comparées $n^\alpha \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On déduit que $R_\alpha \leq R$.

En conséquent $R = R_\alpha$.

II.4 Règle de D'Alembert

Propriété 8

On suppose que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve:

- Si $\ell = 0$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = 0 < 1$. D'après le test de D'Alembert sur les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, d'où $R = +\infty$.
- Si $\ell = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = +\infty > 1$. D'après le test de D'Alembert sur les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| |z|^n$ est divergente donc $|z| \geq R$.
On déduit que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $|z| \geq R$ d'où $R = 0$.
- Supposons que $\ell \notin \{0, +\infty\}$.
Soit $0 < r < \frac{1}{\ell}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = \ell r < 1$. D'après le test de D'Alembert sur les séries numériques, la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente donc $r \leq R$.
On déduit que $\forall r < \frac{1}{\ell}$, $r \leq R$ d'où $\frac{1}{\ell} \leq R$.
Soit $r > \frac{1}{\ell}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n} \right| = \ell r > 1$. D'après le test de D'Alembert sur les séries numérique, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ est divergente donc $r \geq R$.
On déduit que $\forall r > \frac{1}{\ell}$, $r \geq R$ d'où $\frac{1}{\ell} \geq R$.
D'où $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple

Cherchons le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Posons $u_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple: Séries entières lacunaires

Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{2^n(n+1)}$.

Dans ce cas $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n(n+1)}$ et $a_{2n} = 0$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'est pas défini à partir d'un certain rang.

On applique la règle de d'Alembert à $u_n = \frac{z^{2n+1}}{2^n(n+1)}$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2(n+2)} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{2}$$

et $\frac{|z|^2}{2} < 1 \iff |z| < \sqrt{2}$, donc $R = \sqrt{2}$

II.5 Avec les relations de comparaison**Propriété 9**

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b .

1. Si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $R_b \leq R_a$;
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_b = R_a$.

Preuve:

1. Si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M|b_n|$.
Soit $r < R_b$ donc $b_n r^n \rightarrow 0$ d'où $a_n r^n \rightarrow 0$. On déduit que $r \leq R_a$ et par suite $R_b \leq R_a$.
2. Si $a_n \sim b_n$ alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ donc $R_a = R_b$.

Exemple

Calcul du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} (2 + (-1)^n) z^n$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq (2 + (-1)^n) \leq 3$$

donc $(2 + (-1)^n) = O(1)$ et $1 = O((2 + (-1)^n))$ d'où $\sum_{n \geq 0} (2 + (-1)^n) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Donc $R = 1$.

Exemple

Calcul du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) z^n$.

On sait que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sim \ln n$ donc $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln n z^n$ ont le même rayon de convergence. Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 1$ donc $R = 1$.

Exemple

Calcul du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) z^n$.

On a $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On déduit que $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} z^n$ ont le même rayon de convergence. Or $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $R = 1$.

III Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b . On définit les séries entières suivantes

- **Somme :** $\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$.
- **Multiplication par un scalaire :** $\lambda \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) z^n$.
- **Produit :** $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \times \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$.

L'ensemble des séries entières muni des lois ainsi définies est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

Attention

Ces énoncés ne contiennent aucune propriété de convergence.

Propriété 10: Somme

On note R_{a+b} le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Alors

1. $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.
2. Pour tout $\forall |z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve:

Soit $r < \min(R_a, R_b)$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n r^n$ convergent, d'où $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) r^n$ converge. On déduit que $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.
 Supposons que $R_a \neq R_b$ par exemple $R_a < R_b$. Soit $R_a < r < R_b$, on a $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ diverge et $\sum_{n \geq 0} b_n r^n$ converge donc $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) r^n$ diverge. On déduit que $R \leq r$ et que $R_{a+b} \leq R_a = \min(R_a, R_b)$. Par suite, $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Remarque :

Il se peut que $R > \min(R_a, R_b)$. En effet, pour $a_n = -b_n = 1$ on a $R_a = R_b = 1$ alors que le rayon de la série nulle $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est $+\infty$.

Exemple

Soient de séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Calculons le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$.

On pose R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq c_n$ et $|b_n| \leq c_n$ donc $R \leq R_a$ et $R \leq R_b$ d'où $R \leq \min(R_a, R_b)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq |a_n| + |b_n|$ donc $\min(R_a, R_b) \leq R$. D'où $R = \min(R_a, R_b)$.

Exemple

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = 0$.

Calculons le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n + b_n| \geq |a_n|$ et $|a_n + b_n| \geq |b_n|$ donc $R \leq R_a$ et $R \leq R_b$ d'où $R \leq \min(R_a, R_b)$. D'autre part, on sait que $R \geq \min(R_a, R_b)$ d'où l'égalité.

Propriété 11: Produit

On note R_{ab} le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$. Alors $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$. De plus

$$\forall |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Preuve:

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent absolument, d'où la série produit de Cauchy

$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

On déduit que $R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ convergent absolument ainsi que leur produit de Cauchy,

$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Remarque :

Il se peut que $R' > \min(R_a, R_b)$. En effet, les séries $a_n = 1, b_0 = b_1 = 1$ et $b_n = 0, \forall n \geq 2$ ont pour rayons respectifs $R_a = 1$ et $R_b = +\infty$ alors que le rayon de la série produit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} z^n \times (1 - z) = 1$ a pour rayon $+\infty$.

IV Somme d'une série entière

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

On note

- ▶ $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$
- ▶ $\overline{\mathcal{D}(0, R)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$
- ▶ $\text{Def}_{\mathbb{K}}(f) = \left\{ z \in \mathbb{K}, \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ converge} \right\}$ le domaine de convergence simple de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

IV.1 Somme d'une série entière complexe

Propriété 12: Domaine de convergence simple

Le domaine de convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ c'est-à-dire le domaine de définition de $f : z \mapsto$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie :

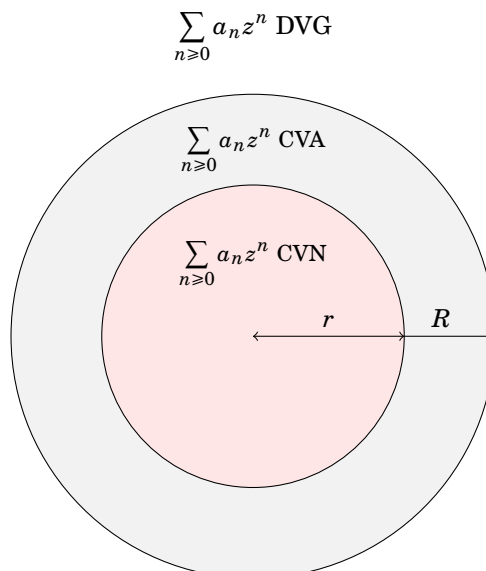
$$D(0, R) \subset \text{Def}_{\mathbb{C}}(f) \subset \overline{D(0, R)}$$

Propriété 13: Convergence uniforme et normale

Pour tout $0 < r < R$ la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathcal{D}(0, r)}$.

Preuve:

Soit $0 < r < R$ donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument d'où la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ converge. On a $\forall z \in \mathcal{D}(0, r), |a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ et la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ converge donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{D}(0, r)$. En particulier, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}(0, r)$.



Remarque :

En général, on n'a pas convergence uniforme sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0, R)$. En effet, pour $\sum_{n \geq 0} z^n$, on a $R = 1$ et $\|z^n\|_{\infty, \mathcal{D}(0, 1)} = 1 \not\rightarrow 0$ donc la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ ne converge pas uniformément sur $\mathcal{D}(0, 1)$.

Corollaire 2

La somme f est continue sur $\mathcal{D}(0, R)$.

Preuve:

Soit $0 < r < R$. On a : La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}(0, r)$. $\forall n \in \mathbb{N}, z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\mathcal{D}(0, r)$. Donc la somme f de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est continue sur $\mathcal{D}(0, r)$. Le résultat étant vrai pour tout $0 < r < R$ donc f est continue sur $\mathcal{D}(0, R)$.

Propriété 14

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge absolument, alors

1. La série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$.
2. La somme f est continue sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$.

Preuve:

On a $\forall z \in \overline{\mathcal{D}(0, R)}, |a_n z^n| \leq |a_n| R^n$ et la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$ converge donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$. En particulier, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$. On a : La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$. $\forall n \in \mathbb{N}, z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$. Donc la somme f de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est continue sur $\overline{\mathcal{D}(0, R)}$.

IV.2 Somme d'une série entière réelle

Dans ce paragraphe la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

Propriété 15

1. $] -R, R[\subset \text{Def}_{\mathbb{R}}(f) \subset [-R, R]$
2. La série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $] -R, R[$
3. f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on a $\forall x \in] -R, R[$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} x^n.$$

$$\text{En particulier } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

4. La somme f est continue sur $] -R, R[$ et on a $\forall x \in] -R, R[$,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Preuve:

1. Triviale
2. Soit $[-r, r] \subset] -R, R[$ et $x \in [-r, r]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $k! C_n^k \sim n^k$, donc $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} k! C_n^k a_n x^n$ ont le même rayon de convergence. Or $\sum_{n \geq 0} k! C_n^k a_n x^n$ et $\sum_{n \geq k} k! C_n^k a_n x^{n-k}$ ont le même rayon de convergence donc $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq k} k! C_n^k a_n x^{n-k}$ ont le même rayon de convergence.

► Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in] -R, R[$,

$$f_n^{(p)}(x) = \begin{cases} p! C_n^p a_n x^{n-p} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

► La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $] -R, R[$

► Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[-r, r]$ pour tout $0 < r < R$.

D'après le théorème de dérivation sous signe somme, f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -R, R[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} p! C_n^p a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} p! C_{n+p}^p a_{n+p} x^n$$

En particulier $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

4. Soit $x \in] -R, R[$ donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur le segment délimité par 0 et x . D'après le théorème d'interversion intégrale-somme

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Corollaire 3

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ deux séries entières telles que

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in] -r, r[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n$.

Preuve:

Si $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in] -r, r[, f(x) = g(x)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

V Développement en série entière

V.1 Fonctions réelles développables en séries entières

Soient I un intervalle non vide contenant 0 de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition 2

On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ et il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On dit aussi f est développable en série entière sur $] -r, r[$.

Propriété 16

La fonction $x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Preuve:

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ est 1. Soit $x \in] -1, 1[$. On sait que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^k x^n$. Lorsque

$k \rightarrow +\infty$ on obtient $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc la fonction $\frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Remarque :

On a aussi le développement en série entière sur $] -1, 1[$ suivant :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Propriété 17: Fraction avec pôle simple

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ est développable en série entière sur $] -r, r[$ où $r = |a|$ et on a :

$$\forall x \in] -r, r[, \quad \frac{1}{x-a} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$$

Preuve:

En effet, pour $|x| < |a|$

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n$$

Propriété 18: Caractéristique

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. f est développable en série entière en 0
2. $\exists r > 0$, tel que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ et la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ de f en 0 converge simplement sur $] -r, r[$ de somme f .
3. $\exists r > 0$, tel que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ et pour tout $x \in] -r, r[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) On suppose que f est développable en série entière en 0

► Il existe $r > 0$ et il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$, de somme notée g telle que

$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que la somme d'une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence donc g est C^∞ sur $] -R, R[$ d'où sa restriction f est C^∞ sur $] -r, r[$.

► On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Or $g = f$ sur $] -r, r[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ d'où $\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

2 $\Rightarrow$ 3) On suppose $\exists r > 0$, tel que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ et la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ de f en 0 converge simplement sur $] -r, r[$ de somme f , alors par la formule de Taylor avec reste intégrale

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3 $\Rightarrow$ 1) On a $\forall x \in] -r, r[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = 0$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $] -r, r[$, en particulier son rayon de convergence est supérieur ou égal à r , et $\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. On déduit que f est développable en série entière en 0.

Propriété 19

La fonction $\exp$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp x = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Preuve:

Soit $r > 0$, $x \in]-r, r[$ et $n \in \mathbb{N}$, $|\exp^{(n)} x| = e^x \leq e^r$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc la fonction $\exp$ est développable en série entière sur $] -r, r[$ et on a

$$\forall x \in]-r, r[, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Or r est arbitraire donc la fonction $\exp$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Corollaire 4

Soit $a > 0$. La fonction $f(x) = a^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n.$$

Preuve:

On a $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}$ donc les fonctions $x \mapsto a^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$.

Application 1: Régularité d'une fonction

L'application

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

puis pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

Ainsi f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$$

Application 2: Calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n+1)!}$

Calculons la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n+1)!}$.

On a immédiatement $R = +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}$, par décalage d'indice

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^{2n-1}$$

donc

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^{2n} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x^2)^n$$

Finalement

$$S(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } S(0) = 0$$

Attention

Si f est C^∞ au voisinage de 0 et sa série de Taylor en 0 converge alors f n'est pas forcément développable en série entière en 0

Exemple

La fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle développable en série entière en 0.

f est de C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. Donc la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $\mathbb{R}$ et sa somme est nulle sur $\mathbb{R}$ alors que $f \neq 0$.

Propriété 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f développable en série entière en 0 alors f admet un développement limité d'ordre n en 0.

Si de plus $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ au voisinage de 0 alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Preuve:

On a f développable en série entière en 0 donc $\exists r > 0$, il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$

telle que $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait que $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ et $\sum_{k \geq n+1} a_k x^{k-n}$ ont le même rayon de convergence R donc

$g : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^{k-n}$ est continue sur $]-r, r[$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$ d'où $g(x) = o(1)$. On a $\forall x \in]-r, r[:$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

donc f admet un développement limité d'ordre n en 0. Ce développement est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Corollaire 5

Le développement en série entière de f sur $]-r, r[$ est unique.

Corollaire 6

On suppose que f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$. On pose

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Si f est paire sur $]-r, r[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$.
- Si f est impaire sur $]-r, r[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$.

Preuve:

On a

- Si f est paire, alors $\forall x \in]-r, r[, f(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$. Par unicité du développement en série entière $\forall n \in$

$\mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_n$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$.

- Si f est impaire, alors $\forall x \in]-r, r[, f(x) = -f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n x^n$. Par unicité du développement en série entière $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^{n+1} a_n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$.

V.2 Développement en série entière par dérivation et intégration

Propriété 21

Si f est développable en série entière sur $] -r, r[$, alors toutes les dérivées et primitives de f sont développables en séries entières sur $] -r, r[$.

Preuve:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall x \in]-r, r[, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} k! C_{n+k}^k a_n x^n$ d'où $f^{(k)}$ est développable en série entière sur $] -r, r[$. De même soit h une primitive de f sur $] -r, r[$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-r, r[, h(x) = \lambda + \int_0^x f(t) dt = \lambda + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ donc h est développable en séries entières sur $] -r, r[$.

Propriété 22

La fonction $\ln(1+x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Cette relation est aussi valable pour $x = 1$.

Preuve:

On sait que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ est 1. Soit $x \in]-1, 1[$. On a

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n,$$

donc, par intégration entre 0 et x ,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

On déduit que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Pour $x \in [0, 1]$ la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ est décroissante et $\left\| \frac{x^n}{n} \right\|_{\infty, [0, 1]} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc, d'après le critère spéciale des séries alternées de fonctions, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On en déduit que la somme $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ est continue sur $] -1, 1[$. En outre $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $] -1, 1[$ et elle coïncide avec la somme sur $] -1, 1[$, donc elles sont égales, soit

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

La relation est alors vraie pour $x = 1$ et on a $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Corollaire 7

La fonction $\ln(1-x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

La relation est aussi valable pour $x = -1$.

Propriété 23

La fonction $\arctan x$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Cette relation est aussi valable pour $x = 1$.

Preuve:

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est 1. On a

$$\forall |t| < 1, \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

donc

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Soit $x \in] -1, 1[$, alors par primitivation

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On déduit que la fonction $\arctan x$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a

$$\forall x \in] -1, 1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Pour $x \in [0, 1]$, la suite $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$ est décroissante et $\left\| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\|_{[0,1]} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ donc, d'après le critère spéciale des séries

alternées de fonctions, $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On déduit que la somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue sur $] -1, 1[$. De plus $\arctan$ est continue sur $] -1, 1[$ et elle coïncide avec la somme sur $] -1, 1[$, donc

$$\forall x \in] -1, 1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

En particulier $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exemple: Calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Calculons la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

On a immédiatement $R = 1$. Pour $x \in] -1, 1[$, on peut écrire

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$$

avec convergence des séries écrites. On a alors

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Propriété 24

Soit $x \in] -1, 1[$ et $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^p x^n.$$

Preuve:

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Par dérivation successive :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^p x^n.$$

Propriété 25: Fraction avec pôle simple

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ est développable en série entière sur $] -r, r[$ où $r = |a|$ et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -r, r[, \quad \frac{1}{(x-a)^{p+1}} = (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^p \frac{x^n}{a^{p+n+1}}$$

Preuve:

En effet, pour $|x| < |a|$

$$\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{a^{p+1}} \frac{1}{(1-\frac{x}{a})^{p+1}} = (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p}^p \frac{x^n}{a^{p+n+1}}$$

Application 3: Fractions rationnelles

Formons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$$

La partie entière de f est nulle, 1 est pôle double et -2 est pôle simple. La décomposition en éléments simples de f est alors de la forme

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

avec

$$a = \frac{1}{(x-1)^2} \Big|_{x=-2} = \frac{1}{9}, c = \frac{1}{(x+2)} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3} \text{ et } b = \left(\frac{1}{(x+2)} \right)' \Big|_{x=1} = -\frac{1}{9}$$

Sur $] -1, 1[$

$$f(x) = \frac{1}{18} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{9} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{18 \cdot 2^n} + \frac{3n+4}{9} \right) x^n$$

V.3 Par opérations algébriques**Propriété 26**

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ développables en séries entières sur $] -r, r[$ et $\alpha \in \mathbb{C}$

Alors $\alpha f, f+g, f\overline{g}, \Re(f)$ et $\Im(f)$ sont développables en séries entières sur $] -r, r[$.

Preuve:

Il existe des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ de rayons de convergence $R_a, R_b \geq r$ telles que sur $] -r, r[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

► Pour tout $x \in] -r, r[$, on a

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n x^n$$

La fonction λf est sur $] -r, r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.

► Pour tout $x \in] -r, r[$, on a

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

La fonction $f + g$ est sur $] -r, r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.

► Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

La fonction fg est sur $] -r, r[$ somme d'une série entière convergente, elle est donc développable en série entière.

► Pour tout $x \in] -r, r[$, $\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n x^n$

► Les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont développables en séries entières comme combinaisons linéaires de fonctions développables en séries entières sur $] -r, r[$

$$\forall x \in] -r, r[, \quad \Re(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(a_n) x^n \text{ et } \Im(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(a_n) x^n$$

Propriété 27

Les fonctions $\cos$, $\cosh$, $\sin$ et $\sinh$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
2. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
3. $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$
4. $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Preuve:

► Pour tous $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\cos^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ et } |\sin^{(n)}(x)| \leq 1$$

On déduit que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

et

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc les fonctions ch et sh sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exemple: Calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

Calculons la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

On a immédiatement $R = +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

► Si $x \geq 0$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n} = \operatorname{ch} \sqrt{x}$$

► Si $x \leq 0$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} |x|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sqrt{|x|}^{2n} = \cos \sqrt{|x|}$$

V.4 Équations différentielles

Propriété 28

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Preuve:

La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, soit encore

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Ainsi on remarque que f est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y & (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Raisonnons par analyse de synthèse

► **Analyse.**

Supposons f développable en série entière sur $] -R, R[$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in] -R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi f est solution de l'équation $(1+x)y' = \alpha y$ si, et seulement si,

$$(1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

C'est-à-dire si, et seulement si,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ainsi, après le changement d'indice $m = n-1$ dans la première somme et remarquons que le terme d'indice 0 est nul dans la deuxième somme. f est solution de l'équation (*) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n) x^n$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$, soit $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n$. Avec $a_0 = f(0)$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Donc si f est développable en série entière sur $] -R, R[$, alors pour tout $x \in] -R, R[$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

► **Synthèse.**

Soit la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pour $n \geq 1$, on a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc son rayon de convergence est 1. Sa somme vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y & (*) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Donc $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Exemple: Cas de $\alpha = -\frac{1}{2}$

Pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!^2} x^n$$

Exemple: Développement de l'arc-sinus

Formons le développement en série entière en 0 de la fonction arcsin.

Pour tout $x \in]-1, 1[$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} (-x^2)^n$$

Avec, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

donc $(\arcsin x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ puis par intégration d'un développement en série entière

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$