

SÉRIES ENTIÈRES

Propriété: Lemme d’Abel

Soit $r \in \mathbb{R}^{+\ast}$ tel que $(a_n r^n)_n$ soit une suite bornée avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0_{\mathbb{C}}, r)$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument

Propriété: Rayon de convergence

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est l’élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \} = \inf\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n)_n \text{ non bornée} \} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+, a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \} = \inf\{r \in \mathbb{R}^+, a_n r^n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ converge} \} = \inf\{r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \geq 0} a_n r^n \text{ diverge} \} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \text{ converge} \} = \inf\{r \in \mathbb{R}^+, \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \text{ diverge} \} \end{aligned}$$

$$R_c \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = R_c \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^{n+p} \right) = R_c \left(\sum_{n \geq 0} a_{n+p} z^n \right)$$

Propriété: Critère de comparaison

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons respectifs R_a et R_b .

- si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Propriété: Critère de D’Alembert

Si (a_n) ne s’annule pas à partir d’un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$. Avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

CONVERGENCES D’UNE SÉRIE ENTIÈRE

Propriété: Convergence d’une série entière

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- La série entière converge absolument sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$;
- La série entière converge normalement sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0, R_1)$ avec $0 < R_1 < R$;
- $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\mathcal{D}(0, R)$.
- Si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ CA, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ CN sur $\mathcal{D}_f(0, R)$.

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

Propriété: Somme et produit

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b et

soient $\sum_{n \geq 0} s_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$ respectivement somme et produit de Cauchy des

deux séries précédentes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$. Soit R_s et R_p les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors

- $R_s \geq \min(R_a, R_b)$, $R_p \geq \min(R_a, R_b)$;
- Si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = \min(R_a, R_b)$;
- On pose $R = \min(R_a, R_b)$. Alors $\forall z \in \mathcal{D}(0, R)$,
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.

Propriété: Série dérivée

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R . La série $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ est de rayon

de convergence R et dite série dérivée de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

$$\text{Soit } p \in \mathbb{N}, R_c \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = R_c \left(\sum_{n \geq 0} n^p a_n z^n \right) = R_c \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^p} z^n \right).$$

CAS DES SÉRIES RÉELLES

Propriété: Primitive

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme

$f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors les primitives de f sur $] - R, R[$ s’écrivent

$$x \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ où } k \in \mathbb{K}$$

Propriété: Régularité et coefficients

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme

f . Alors $f \in \mathcal{C}^\infty (] - R, R[, \mathbb{K})$:

$$\forall x \in] - R, R[, \forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$$

$$\text{En particulier } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ et } \forall x \in] - R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ENTIÈRES

Les fonctions, considérées dans ce paragraphe, sont définies sur un intervalle I voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition: Fonction développable en série entière

On dit que f est développable en série entière en 0 (ou à l’origine) s’il existe $r > 0$ et il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que

$$\forall x \in] - r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On dit aussi f est développable en série entière sur $] - r, r[$.

Propriété: Propriété caractéristique

Si f est de classe C^∞ au voisinage de 0. Les deux assertions sont équivalentes

- f est développable en série entière;
- $\exists r > 0, \forall x \in] - r, r[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$.

Auquel cas les primitives et les dérivées successives de f sont DSE en 0

Propriété: Opérations algébriques

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ développables en séries entières sur $] - r, r[$. Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha f + \beta g, fg, \mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont DSE sur $] - r, r[$.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ENTIÈRES

Propriété: Rayon de convergence $R = +\infty$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R} : \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \bullet \cosh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \bullet \sinh x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \bullet \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \bullet \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Propriété: Rayon de convergence $R = 1$

Pour tous $x \in] - 1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n & 4. \ln(1-x) &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ 2. \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n & 5. \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ 3. \arctan x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & 6. (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

3. vraie pour ± 1 ; 4. Vraie pour $x = -1$ et 5. vraie pour 1

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81