
Les familles sommables

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP

Table des matières

I Ensembles dénombrables	2
II Familles sommables	4
II.1 Familles positives sommables	4
II.2 Familles numériques sommables	8
II.3 Sommation par paquets	10
III Applications aux suites doubles	13
III.1 Suites doubles	13
III.2 Produit de Cauchy de deux séries	13

I Ensembles dénombrables

Soient E et F deux ensembles.

Définition 1

On dit que :

- E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- E est au plus dénombrable si E est fini ou dénombrable.

Remarque :

Supposons que E est dénombrable et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ une bijection. Notons $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x_n$ alors

$$E = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Autrement dit, E est dénombrable si on peut numéroté ou indexer tous ses éléments.

Remarque :

1. Si E est dénombrable alors E est infini.
2. Si E est dénombrable alors tout ensemble en bijection avec E est dénombrable.

Exemple

L'application identité sur $\mathbb{N}$ est bijective donc $\mathbb{N}$ est dénombrable.

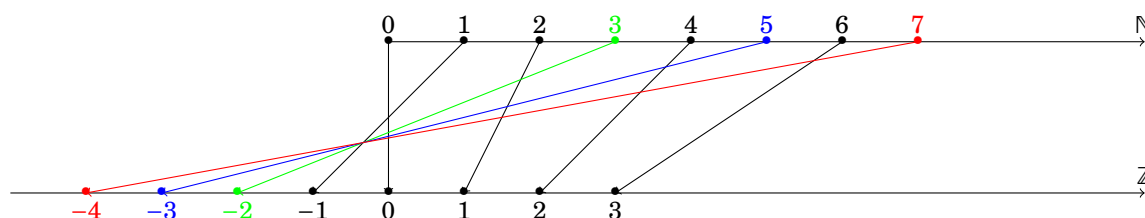
Exemple

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

En effet, l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} p & \text{si } n = 2p \\ -p & \text{si } n = 2p - 1 \end{cases} \end{cases}$$

est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.



Propriété 1

1. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable

Preuve:

On prouve la première assertion.

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$ et l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ définie par :

- $\varphi(0) = \min A$,
- $\forall n \geq 1, \varphi(n) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\})$.

Montrons que φ est bijective.

- φ est strictement croissante donc injective.
- Soit $a \in A$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq a$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \in A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) < a$$

L'application φ est strictement croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \varphi(n)$. On déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < a.$$

*Ce qui est absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas borné. Donc φ est surjective.
 φ est bijective et A est dénombrable.*

Corollaire 1

Soit E un ensemble dénombrable et $A \subset E$, alors A est au plus dénombrable.

Corollaire 2

Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application

1. Si F est dénombrable et φ injective, alors E est au plus dénombrable.
2. Si E est dénombrable et φ surjective, alors F est au plus dénombrable.

Preuve:

1. Si φ est injective, alors E et $\varphi(E)$ sont en bijection. Mais $\varphi(E)$ est une partie d'un ensemble dénombrable, donc elle est au plus dénombrable, ainsi E est au plus dénombrable.
2. Si $\varphi : E \rightarrow F$ est une application surjective, alors il existe une application injective de F dans E . On fait appel au résultat de la première assertion.

Propriété 2

Soit $m \geq 2$. L'ensemble $\mathbb{N}^m$ est dénombrable

Preuve:

Si $p_1, \dots, p_m$ sont les m premiers nombres premiers alors l'application $\varphi : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi(n_1, \dots, n_m) = p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$ est injective. Donc $\mathbb{N}^m$ est au plus dénombrable et puisqu'il est infini, donc $\mathbb{N}^m$ est dénombrable.

Corollaire 3

Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve:

Soient $E_1, \dots, E_m$ des ensembles dénombrables. Il existe des bijections $\varphi_i : E_i \rightarrow \mathbb{N}$. Donc $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est une bijection de $E_1 \times \dots \times E_m$ vers $\mathbb{N}^m$. On a déjà montré que $\mathbb{N}^m$ est dénombrable. D'où le résultat.

Conséquence 1

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

Preuve:

L'application $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\varphi(m, n) = \frac{m}{n}$ est surjective. Or $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exemple

Les ensembles $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Q}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ sont dénombrables

Propriété 3

Une union au plus dénombrable de parties au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Preuve:

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties au plus dénombrables et montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est au plus dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\varphi_n : E_n \rightarrow \mathbb{N}$ une injection.

► On pose $F_0 = E_0$.

► $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = E_n \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{n-1})$.

On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et les F_n sont deux à deux disjoints. Pour $x \in F_n$ on pose $\varphi(x) = (n, \varphi_n(x))$. L'application φ est une injection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ dans $\mathbb{N}^2$. En effet si $\varphi(x) = \varphi(y)$, alors $n_x = n_y = n$ et $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ et, par suite, $x = y$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est dénombrable. D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.

Exemple

1. $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket -n, n \rrbracket$ est dénombrable

$$2. \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p}{q} \text{ tel que } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, |p| + q \leq n \right\}$$

Théorème 1

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Preuve:

Non exigible.

- On montre que l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

On suppose qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\varphi(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{nk}}{10^k}$ l'écriture décimale propre de $\varphi(n)$. Soit alors $x = 0, x_1 x_2 \dots \in [0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0$ si $a_{nn} \neq 0$ et $x_n = 1$ si $a_{nn} = 0$.

Si $\exists n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = x$ alors $a_{nn} = x_n$. Ce qui est absurde. D'où $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car il contient un ensemble non dénombrable

II Familles sommables

Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(x_i)_{i \in I}$ une famille numérique et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de I telle que

- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, on a $I_m \cap I_n = \emptyset$;
 ► $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$.

II.1 Familles positives sommables

Définition 2

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} x_i, J \text{ partie finie de } I \right\}$ est majoré.

Dans ce cas, $\sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i, J \text{ partie finie de } I \right\}$ s'appelle la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et on la note $\sum_{i \in I} x_i$.

Convention :

- $\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$
 ► Si I est fini la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable. On suppose désormais que I est dénombrable
 ► On convient de noter $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$ si la famille $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable

Propriété 4: Retour aux séries

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection, alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. La série $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ est convergente.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{i \in I} x_i$$

Preuve:

1 $\Rightarrow$ 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $N = \max_{0 \leq k \leq n} (\sigma(k))$, on a

$$\sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^N x_k \leq \sum_{i \in I} x_i$$

D'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ et l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} \leq \sum_{i \in I} x_i$

1 $\Leftarrow$ 2) Soit J une partie finie de I . On pose $n = \max(\sigma^{-1}(J))$, on a $J \subset \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in \sigma(\llbracket 0, n \rrbracket)} x_i = \sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$$

Par définition la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$

Dans le cas de convergence, on a l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{i \in I} x_i$

Propriété 5: Cas $I = \mathbb{N}$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

La famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge.

Auquel cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Preuve:

Prendre $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}}$

Exemple

La suite $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable car il s'agit d'une suite de réels positif et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge

Propriété 6: Convergence commutative

Soit $\sum_{n \geq 0} x_n$ une suite à termes positifs convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ converge et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$$

Exemple

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application bijective. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma^2(n)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$

$\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est supposée bijective

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est sommable. Il en est de même de la famille permutée $\left(\frac{1}{(\sigma(n))^2}\right)_{n \geq 1}$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge et est de somme égale $\frac{\pi^2}{6}$
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ à termes positifs diverge donc la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ n'est pas sommable. Il en est de même de la famille permutée $\left(\frac{1}{\sigma(n)}\right)_{n \geq 1}$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge

Propriété 7: Critère de comparaison

Soit $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I, x_i \leq y_i$

1. Si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$
2. Si la famille $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable alors $(y_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable.

Preuve:

1. Soit J une partie finie de I . On a $\forall i \in I, x_i \leq y_i$ donc

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in J} y_i \leq \sum_{i \in I} y_i$$

donc la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$

2. Par contraposée.

Propriété 8: Sous-famille d'une famille sommable

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et J une partie dénombrable de I . Alors $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

Preuve:

Soit K une partie finie de J , alors K est une partie de I et

$$\sum_{i \in K} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

Donc $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$

Corollaire 4

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

S'il existe une sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ qui n'est pas sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable

Propriété 9: Sommation par paquets

La famille $(x_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, l'on a les deux propriétés suivantes :

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable de somme $S_n = \sum_{i \in I_n} a_i$.

▷ La série $\sum_{n \geq 0} S_n$ est convergente.

Auquel cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) = \sum_{i \in I} x_i$

Exemple

Étudions la sommabilité de la suite double $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ définie par :

$$a_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}$$

Prendre la famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p+q=n\}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sigma_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

La famille est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} \sigma_n$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha > 2$. On a alors :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Remarque :

On peut appliquer le résultat précédent même si la partition est finie

Exemple: Somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, et l'on peut calculer sa somme en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exemple: Étude d'une série

Étude de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ définie par :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}^*, n = p^2 \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $I = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists p \in \mathbb{N}^*, n = p^2\}$ et $J = \mathbb{N}^* \setminus I$. Il est clair que $\{I, J\}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$. La série est à termes positifs donc il suffit de vérifier la sommabilité des familles $(a_n)_{n \in I}$ et $(a_n)_{n \in J}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

On a $I = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists p \in \mathbb{N}^*, n = p^2\} = \{n^2 / n \in \mathbb{N}^*\}$ donc $(a_n)_{n \in I} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$. Or la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est sommable donc la famille $(a_n)_{n \in I}$ est sommable.

Puisque $J \subset \mathbb{N}^*$ et la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est sommable donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in J}$ est sommable d'où la sommabilité de la famille $(a_n)_{n \in J}$. Les familles $(a_n)_{n \in I}$ et $(a_n)_{n \in J}$ sont sommables donc la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

II.2 Familles numériques sommables

Définition 3: Famille numérique sommable

La famille numérique $(u_k)_{k \in I}$ est dite sommable si la famille $(|u_k|)_{k \in I}$ est sommable.

Notation :

Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille de réels. Pour tout $k \in I$, on pose

$$u_k^+ = \max(u_k, 0) \quad \text{et} \quad u_k^- = \max(-u_k, 0)$$

Pour tout $k \in I$, on a bien :

- ▶ $u_k^+, u_k^- \in \mathbb{R}_+$,
- ▶ $u_k^+ + u_k^- = |u_k|$,
- ▶ $u_k^+ - u_k^- = u_k$.

Propriété 10: Somme d'une famille sommable

Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille numérique sommable.

1. Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est de réels, alors $(u_k^+)_{k \in I}$ et $(u_k^-)_{k \in I}$ sont sommables.
On définit la somme de la famille $(u_k)_{k \in I}$ comme suit :

$$\sum_{k \in I} u_k := \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^-$$

2. Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est de complexes, alors les deux familles réelles $(\Re(u_k))_{k \in I}$ et $(\Im(u_k))_{k \in I}$ sont sommables. On définit la somme par

$$\sum_{k \in I} u_k := \sum_{k \in I} \Re(u_k) + i \sum_{k \in I} \Im(u_k)$$

En outre

$$\left| \sum_{k \in I} u_k \right| \leq \sum_{k \in I} |u_k|$$

Preuve:

1. Les familles $(u_k^+)_{k \in I}$ et $(u_k^-)_{k \in I}$ sont à termes positifs et pour tout $k \in I$

$$u_k^+ \leq |u_k| \quad \text{et} \quad u_k^- \leq |u_k|$$

Par le critère de comparaison les deux familles $(u_k^+)_{k \in I}$ et $(u_k^-)_{k \in I}$ sont sommables, ce qui justifie la définition de $\sum_{i \in I} u_i$

2. Les familles $(\Re(u_k))_{k \in I}$ et $(\Im(u_k))_{k \in I}$ sont réelles et pour tout $k \in I$

$$|\Re(u_k)| \leq |u_k| \quad \text{et} \quad |\Im(u_k)| \leq |u_k|$$

Par le critère de comparaison les deux familles $(\Re(u_k))_{k \in I}$ et $(\Im(u_k))_{k \in I}$ sont sommables, ce qui justifie la définition de $\sum_{i \in I} u_i$

Notation :

$\ell^1(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des familles sommables

Propriété 11

Soit $(u_k)_{k \in I}$, $(v_k)_{k \in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la famille $(\lambda u_k + v_k)_{k \in I}$ est sommable et

$$\sum_{k \in I} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k \in I} u_k + \sum_{k \in I} v_k$$

Autrement-dit $\ell^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Propriété 12: Sous-famille d'une famille sommable

Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille sommable et J une partie dénombrable de I . Alors $(u_k)_{k \in J}$ est sommable

Propriété 13: Retour aux séries

Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection, alors, la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Auquel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{k \in I} u_k$$

Preuve:

On distingue deux cas

► Le cas réel

⇒ Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable, alors les deux familles réelles positives $(u_k^+)_{k \in I}$ et $(u_k^-)_{k \in I}$ sont sommables, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ = \sum_{i \in I} u_i^+ \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{i \in I} u_i^-$$

Donc, la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, car $|u_{\sigma(n)}| = u_{\sigma(n)}^+ + u_{\sigma(n)}^-$

⇐ Si la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, alors la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable

Dans le cas de convergence, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} u_i &= \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

► Le cas complexe.

$(u_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, $(\operatorname{Re}(u_k))_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_k))_{k \in I}$ sont sommables si, et seulement si, les deux séries $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_{\sigma(n)})$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_{\sigma(n)})$ sont absolument convergentes si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

Dans le cas de convergence, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in I} u_k &= \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) - i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_{\sigma(n)}) - i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

Propriété 14: Cas de $I = \mathbb{N}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Auquel cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Preuve:

Prendre $\sigma = \operatorname{Id}_{\mathbb{N}}$

II.3 Sommation par paquets

Propriété 15: Sommation par paquets

Soit $(u_k)_{k \in I}$ est une famille de complexes sommable, alors

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable. On note $S_n = \sum_{k \in I_n} u_k$;
2. La série $\sum_{n \geq 0} S_n$ est absolument convergente ;
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{k \in I} u_k$. Autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{k \in I} u_k$

Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique $\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k2^{n+1}}$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme $p = 2^n(2k+1)$ avec $n, k \in \mathbb{N}$. On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1), k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m \in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

Remarque :

On peut appliquer le résultat précédent même si la partition est finie

Exemple: Somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est absolument convergente, la famille $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, et l'on peut calculer sa somme en séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

De la même façon

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Corollaire 5

Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est absolument convergente. Alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable de somme S_n .
2. La famille $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.
3. On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Attention

Le résultat est faux lorsque la série n'est pas supposée absolument convergente. En effet, on sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente de somme $\ln 2$.

Soit le regroupement $J_n = \{2n-1, 4n-2, 4n\}$ pour $n \geq 1$ on a $\left(\frac{(-1)^{p-1}}{p}\right)_{p \in J_n}$ est sommable de somme

$$S_n = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{2} (\ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma) + o(1) = \frac{\ln 2}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

Cette fois la série $\sum S_n$ est convergente de somme $\frac{\ln 2}{2} \neq \ln 2$.

Propriété 16: Critère suffisant de sommabilité

On suppose que la famille $(u_k)_{k \in I}$ vérifie :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(u_k)_{k \in I_n}$ est sommable et on pose $T_n = \sum_{k \in I_n} |u_k|$.
- La série $\sum_{n \geq 0} T_n$ converge

Alors $(u_k)_{k \in I}$ est sommable et $\sum_{k \in I} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k \in I_n} u_k \right)$

Propriété 17: Cas $I = \mathbb{Z}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille numérique, alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable ;
2. Les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont absolument convergentes ;
3. La série $\sum_{n \geq 1} (|u_{-n}| + |u_n|)$ converge

Si l'une de ces assertions est vérifiée, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{-n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Exemple

Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$

Étudions la sommabilité de $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$

- La famille $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$ converge
- La famille $(r^{|n|} e^{-in\theta})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable

Donc la famille $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc en sommant par paquets

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} \\
 &= \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}
 \end{aligned}$$

III Applications aux suites doubles

III.1 Suites doubles

Propriété 18: Suites doubles

Soit $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille numérique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m \geq 0} |a_{m,n}|$ converge et $\sum_{n \geq 0} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|$ converge.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_{m,n}|$ converge et $\sum_{m \geq 0} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}|$ converge.
4. La série $\sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} |a_{p,q}|$ converge.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, alors

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_{p,q}.$$

Preuve:

On utilise les partitions suivantes de $\mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$$

Exemple

Existence et valeur de

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Notons que les termes sommés sont positifs.

- Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$. Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} = \frac{1}{q^2}$$

- La série $\sum_{q \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2}$ converge

Donc la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et sa somme

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

III.2 Produit de Cauchy de deux séries

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques.

Définition 4

On appelle produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Propriété 19

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes alors leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve:

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{m,n} = u_m \cdot v_n$.

► Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_{m,n}|$ converge de somme $|u_m| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$, car la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente.

► $\sum_{m \geq 0} |u_m|$ converge.

Donc la suite $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_{p,q} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$$

Qui se traduit à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$.

Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On peut écrire $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} u_k$. La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$.

Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Exemple

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Les séries $\sum_{n \leq 0} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n \leq 0} \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes et ont pour sommes respectives e^a et e^b . La série produit est absolument convergente et a pour somme $e^a \cdot e^b$. Or, cette série-produit $\sum_{n \geq 0} w_n$ a pour terme général

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \frac{b^{n-p}}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p} \\ &= \frac{1}{n!} (a+b)^n \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^{a+b}$, ce qui prouve que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$