

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Soit E un ensemble.

Définition: Ensemble au plus dénombrable

On dit que:

- E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- E est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable

Propriété: Opérations

- Une partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable si, et seulement si, elle est infinie.
- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une union dénombrable de parties dénombrables est dénombrable

FAMILLES POSITIVES SOMMABLES

Soient I un ensemble dénombrable et $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs

Définition

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si

$$\exists M \geq 0, \forall J \subset I \text{ et } J \text{ fini}, \sum_{i \in J} x_i \leq M$$

Auquel cas, $\sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i, J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}$ s'appelle la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et on la note $\sum_{i \in I} x_i$.

Propriété: Sous-famille d'une famille sommable

On suppose que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et soit J une sous-famille dénombrable de I .

Alors, la famille $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et on a $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Propriété: Critère de comparaison

Si: $\forall i \in I, x_i \leq y_i$. Alors

- Si la famille $(y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$$

- La non sommabilité de la famille $(x_i)_{i \in J}$ entraîne la non sommabilité de $(y_i)_{i \in I}$

Propriété: Retour aux séries

Si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ est une bijection, alors, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ est convergente. Auquel cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{i \in I} x_i$$

FAMILLES NUMÉRIQUES SOMMABLES

Soit I un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k \in I}, (y_k)_{k \in I}$ deux familles numériques.

Définition: Famille numérique sommable

La famille $(x_k)_{k \in I}$ est dite sommable si la famille $(|x_k|)_{k \in I}$ est sommable.

Propriété: Cas de $I = \mathbb{N}$

Une suite numérique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement, si la série $\sum_{n \geq 0} x_n$

est absolument convergente. Auquel cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

Propriété: Retour aux séries

Si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection, alors, $(x_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement, si

$\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{k \in I} x_k$

Propriété: Opérations

Soit $(x_k)_{k \in I}, (y_k)_{k \in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la famille

$(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{k \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{k \in I} x_i + \sum_{k \in I} y_i$

Théorème: Sous-famille d'une famille sommable

Soit $(x_k)_{k \in I}$ une famille sommable et J une partie dénombrable de I . Alors $(x_k)_{k \in J}$ est sommable

SOMMATION PAR PAQUETS

Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de I tels que

$$\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$$

Théorème: Critère suffisant de sommabilité

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille numérique. Si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
- La série $\sum_{n \geq 0} T_n$ est convergente avec $T_n = \sum_{i \in I_n} |x_i|$.

Alors: $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$

Propriété: Sommation par paquets

Soit $(x_k)_{k \in I}$ une famille numérique sommable. Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
- La série $\sum_{n \geq 0} S_n$ converge avec $S_n = \sum_{i \in I_n} x_i$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{i \in I} x_i$.

Autrement dit: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) = \sum_{i \in I} x_i$

SUITES DOUBLES

Théorème

Soit $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite numérique double. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m \geq 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right)$ converge.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_{m,n}|$ converge et la série $\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right)$ converge.
- La série $\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q) \in \mathbb{N}^2}} |a_{p,q}|$ converge.

Auquel cas :

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ (n,m) \in \mathbb{N}^2}} a_{p,q}. \end{aligned}$$

PRODUIT DE CAUCHY

Propriété

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques absolument convergentes alors

leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} \right)$ est absolument convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Propriété

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie et $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $ab = ba$. Alors

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81