
Les probabilités

EL AMDAOUI Mustapha,

Lycée IBN TIMIYA,
site web: www.elamdaoui.com,
email: elamdaoui@gmail.com

Niveau: MP-MP*

Table des matières

I	Espaces probabilisés	2
I.1	Tribu	2
I.2	Espace probabilisé et propriétés	3
I.3	Probabilité sur un univers au plus dénombrable	5
I.4	Continuité monotone	6
I.5	Événements négligeable, quasi certain	8
II	Probabilité conditionnelle	9
II.1	Probabilité conditionnelle	10
II.2	Formule des probabilité composées	11
II.3	Formule des Probabilités totales	12
II.4	Formule de Bayes	13
II.5	Indépendance d'événements	14

I Espaces probabilisés

I.1 Tribu

Définition 1: Tribu

Soient Ω un ensemble et T une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que T est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

1. $\Omega \in T$
2. **Stabilité par complémentaire** : Si $A \in T$ alors $\overline{A} \in T$
3. **Stabilité par union dénombrable** : Pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T , $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$.

Les éléments de T sont appelés des **événements** et le couple (Ω, T) est appelé un **espace probabilisable**.

Remarque :

Si Ω est au plus dénombrable, on prend en général $T = \mathcal{P}(\Omega)$

Exemple

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω .
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu de Ω .
3. Soit A une partie de Ω , alors $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu

Propriété 1

Soit Ω un ensemble et T une tribu de partie de Ω .

1. $\emptyset \in T$.
2. T est stable par union et intersection finies et par différence.
3. **Stabilité par intersection dénombrable** : Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in T$ alors $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$.

Preuve:

1. $\emptyset = \overline{\Omega}$ et $\Omega \in T$, donc $\emptyset \in T$
2. Soit $A_0, \dots, A_n \in T$. On pose $A_p = \emptyset$ pour tout $p \geq n+1$, alors par stabilité de T par union dénombrable, on a $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$.
Montrons que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in T$.
Puisque T est stable par complémentarité $\overline{A_i} \in T$ et par stabilité par union finie, on a $\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \in T$, puis $\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}} \in T$
3. Soit I est une partie de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in I$, $A_i \in T$ alors pour tout $i \in I$, $\overline{A_i} \in T$. la stabilité de T par union $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$. D'après les lois de Morgan $\bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}}$

Notation :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisable (Ω, T) .

- L'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation de tous les A_n .
- L'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation d'au moins un A_n .
- L'événement $\bigcap_{N=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \right)$ correspond à la réalisation d'une infinité de A_n .
- L'événement $\bigcup_{N=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n \right)$ correspond à la réalisation de A_n à partir d'un certain rang.

Définition 2: Système complet d'événements

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i \in I}$ (I est une partie de $\mathbb{N}$) d'éléments de T telle que

1. Les événements A_i sont deux à deux incompatibles
2. $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$

I.2 Espace probabilisé et propriétés**Définition 3: Espace probabilisé**

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, T) toute application $\mathbb{P}$ de T dans $[0; 1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \sigma\text{-additivité}$$

$(\Omega, T, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Remarque :

Si $(\Omega, T, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé** et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge

Corollaire 1

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors la famille $(\mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$

Preuve:

On écrit $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ union disjointe des événements, donc $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ et on conclut avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Propriété 2: Règles de calcul

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
4. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
5. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
6. **Formule d'inclusion-exclusion :**

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Preuve:

1. De la définition à la famille d'événements disjoints $(\Omega, \emptyset, \emptyset, \dots)$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$

Si $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$, la somme à droite est infinie, ce qui est absurde. Donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. De la définition à la famille d'événements disjoints $(A, B, \emptyset, \dots)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\emptyset) + \dots$$

grâce à la propriété précédente.

3. On applique la propriété à la famille $(A, \bar{A})$ des événements disjoints,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

4. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ réunion disjointe, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B),$$

$$\text{puis } \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5. D'après ce qui précède $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ car $A \cap B = A$, et puisque $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

6. On écrit $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$. On a $(A \setminus (A \cap B)) \cap B = \emptyset$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus (A \cap B)) \cup B) \\ &= \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Corollaire 2

Soit $A_0, \dots, A_n$ sont des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k)$$

Si de plus $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Preuve:

Par récurrence sur n

I.3 Probabilité sur un univers au plus dénombrable

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable, $T = \mathcal{P}(\Omega)$.

Propriété 3

Soit P une probabilité sur (Ω, T) . Pour tout $\omega \in \Omega$, on introduit les probabilités élémentaires $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$. Alors la famille de réels positifs $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est sommable et de somme égale à 1.

Preuve:

$p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) \in [0, 1]$, donc $p_\omega \in \mathbb{R}_+$.

► Cas Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec $\omega_1, \dots, \omega_n$ deux à deux distincts

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

► Cas Ω dénombrable : $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les $\{\omega_n\}$ deux à deux distincts

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\omega_n\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Théorème 1

Si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1 alors il existe une unique probabilité P sur (Ω, T) vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

De plus, celle-ci est déterminée par

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Preuve:

► **Unicité:** Soit P et Q deux probabilités solutions.

Pour tout $A \subset \Omega$, on a la réunion disjointe $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. Or $A \subset \Omega$ et Ω est au plus dénombrable, donc A est au plus

dénombrable, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} = Q(A)$$

La probabilité P est donc déterminée de façon unique.

► **Existence:** Soit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega}$$

► L'application P est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

► $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ car par hypothèse la somme de (p_{ω}) vaut 1.

► Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Par sommation par paquets

$$\sum_{\omega \in A} p_{\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in A_n} p_{\omega}$$

et donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Propriété 4: Cas particuliers

1. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, alors une probabilité sur Ω est entièrement déterminée par le choix de $p_{\omega_1}, \dots, p_{\omega_n} \in \mathbb{R}_+$ avec

$$\sum_{k=1}^n p_{\omega_k} = 1$$

Lorsque $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_{\omega_i} = \frac{1}{n}$, alors la probabilité définie est dite la probabilité uniforme sur Ω et dans ce cas $\forall A \subset \Omega, \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n}$

2. Une probabilité sur $\mathbb{N}$ est déterminée par le choix de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

Exemple

Soit $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \alpha \frac{\lambda^n}{n!}$

1. Trouver la valeur de α pour laquelle la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

2. Pour cette valeur de α , calculer la probabilité de l'événement $2\mathbb{N}$

Preuve:

1. ► La série $\sum_{n \geq 0} \alpha \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ est à termes positifs si, et seulement si, α est positif

► La série $\sum_{n \geq 0} \alpha \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ converge car la série exponentielle converge et est de somme ae^{λ}

Donc $\alpha = e^{-\lambda}$

2. Posons $\alpha = e^{-\lambda}$, alors, par définition :

$$\mathbb{P}(2\mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$

I.4 Continuité monotone

Théorème 2: Continuité croissante

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de T ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de T alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

Preuve:

1. Posons $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et pour tout $n \geq 1$, A_n vérifie la décomposition en union disjointe :

$$A_n = A_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus A_{i-1})\right)$$

En écrivant la réunion infinie des A_n à l'aide de cette décomposition et en effaçant toutes les répétitions des $A_i \setminus A_{i-1}$, on en déduit immédiatement que A vérifie la décomposition en union disjointe :

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = A_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \setminus A_{i-1})\right)$$

Passant aux probabilités, ces deux décompositions nous donnent :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \setminus A_{i-1})$$

Comme cette série converge, sa somme est la limite de la suite de ses sommes partielles de rang n , ce qui s'écrit :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_0) + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Ainsi pour compléter la preuve, il ne reste plus qu'à justifier la décomposition de A_n . Posons :

$$D_n = A_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus A_{i-1})\right)$$

La première inclusion est évidente puisque pour tout $i \leq n$, $A_i \setminus A_{i-1} \subset A_i \subset A_n$. Pour prouver l'inclusion inverse, on note ω un élément quelconque de A_n et on montre que ω appartient à D_n . Soit $i_0 = i_0(\omega)$ le plus petit des indices i tels que $\omega \in A_i$. Comme cet ensemble d'indices contient au moins n , on a $0 \leq i_0 \leq n$.

Si $i_0 = 0$, $\omega \in A_0$ et comme $A_0 \subset D_n$, $\omega \in D_n$.

Si $i_0 \geq 1$, par la définition même de i_0 , on a $\omega \in A_{i_0}$ et $\omega \notin A_{i_0-1}$, donc $\omega \in A_{i_0} \setminus A_{i_0-1}$ et comme $i_0 \leq n$, $A_{i_0} \setminus A_{i_0-1} \subset D_n$ donc $\omega \in D_n$. Le raisonnement précédent étant valable pour tout ω de A_n , on en déduit $A_n \subset D_n$.

2. Appliquer la première assertion à $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$

Corollaire 3

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 3: Continuité décroissante

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de T ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de T alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Preuve:

Par complémentarité

Exemple: Premier lemme de Borel-Cantelli

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements. On note $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$;
2. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$. Interpréter ce résultat.

1. Par la sous-additivité d'une probabilité,

$$0 \leq \mathbb{P}(D_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

La dernière somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car c'est le reste d'une série convergente. Par le théorème d'encadrement, $(\mathbb{P}(D_n))$ tend vers 0.

2. On écrit que $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n$. On va démontrer que la suite (D_n) est décroissante. En effet,

$$D_{n+1} = D_{n+1} \cap A_n.$$

On peut donc utiliser la continuité monotone décroissante de P pour en déduire

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

Presque sûrement, seul un nombre fini des événements A_n peuvent se produire simultanément.

I.5 Événements négligeable, quasi certain**Définition 4: Événement négligeable**

On dit qu'un événement A est négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Exemple

L'événement impossible est négligeable

Attention

Ne jamais obtenir de six en lançant indéfiniment un dé équilibré est un événement négligeable mais il n'est pas impossible

Propriété 5

1. Un événement inclus dans un événement négligeable est négligeable
2. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
3. Si A est négligeable, pour tout événement B : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.

Preuve:

1. Car si $A \subset B$, alors $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et si de plus $\mathbb{P}(B) = 0$, on tire $\mathbb{P}(A) = 0$
2. Car

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$, car A et $A \cap B$ ($\subset A$) sont négligeables

Définition 5: Événement presque sûr

On dit qu'un événement A est presque sûr ou quasi certain si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Ceci signifie encore que l'événement $\bar{A}$ est négligeable.

Exemple

L'événement certain est presque sûr.

Attention

Obtenir un six en lançant indéfiniment un dé équilibré est un événement presque sûr, mais il n'est pas certain

Propriété 6

1. Un événement contenant un événement presque sûr est presque sûr.
2. Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.
3. Si A est quasi certain, pour tout événement $B : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

Définition 6: Ensemble négligeable et propriété vraie presque sûrement

1. Un sous-ensemble A de Ω est négligeable s'il existe un événement négligeable qui le contient.
2. Une propriété est vraie presque partout si elle est vraie pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$ où A est un ensemble négligeable.

II Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé

II.1 Probabilité conditionnelle

Définition 7

Soit A un événement avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de B sachant A est définie par

$$P_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on convient de poser $\mathbb{P}(B|A) = 0$

Convention :

Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on convient de poser $\mathbb{P}(B|A) = 0$

Propriété 7

Un espace probabilisé et A un événement avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_A : \begin{cases} T & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto P_A(B) \end{cases}$$

définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ dite probabilité conditionnée à A

Preuve:

P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

- Pour tout événement B , $P_A(B) \geq 0$.
- $P_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

- Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de T deux à deux incompatibles

$$P_A \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \frac{\mathbb{P} \left(A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \right)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\text{d'où } P_A \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_A(B_n).$$

Remarque :

$$P_\Omega = P.$$

Corollaire 4

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et H un événement de probabilité non nulle

1. $P_H(\emptyset) = 0$, $P_H(\Omega) = 1$ et si $H \subset A$, $P_H(A) = 1$
2. Si A et B sont incompatibles, alors $P_H(A \cup B) = P_H(A) + P_H(B)$.
3. **Additivité finie :** Soit $A_1, \dots, A_n \in T$ deux-à-deux disjoints, alors

$$P_H \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n P_H(A_i)$$

4. $P_H(\bar{A}) = 1 - P_H(A)$;
5. Si $A \subset B$ alors $P_H(A) \leq P_H(B)$;
6. **Formule d'inclusion-exclusion :**

$$P_H(A \cup B) = P_H(A) + P_H(B) - P_H(A \cap B)$$

II.2 Formule des probabilité composées

Propriété 8: Probabilité composées

Pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'événements telle que $\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \neq 0$

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P} \left(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \right)$$

Preuve:

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $\bigcap_{j=1}^n A_j \subset \bigcap_{j=1}^i A_j$ d'où

$$0 < \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^n A_j \right) \leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^i A_j \right)$$

Donc $\mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^i A_j \right)$ n'est nul pour aucun $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et on peut conditionner par l'événement $\bigcap_{j=1}^i A_j$. Ceci légitime le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ = & \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ = & \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \end{aligned}$$

après simplifications en chaîne de toutes ces fractions.

Exemple

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.

On tire successivement des boules dans cette urne. A chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur.

Montrons qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

Notons A_n l'événement « la boule tirée au n -ième tirage est blanche »

Par probabilités composées

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

avec

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{2}{3}, \dots, \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \frac{n}{n+1}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n+1}$$

Par continuité décroissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = 0$$

Ainsi, l'événement « toutes les boules tirées sont blanches » est négligeable et l'événement complémentaire « la boule rouge initiale est tirée » est presque sûr.

II.3 Formule des Probabilités totales

I un ensemble non vide et au plus dénombrable

Propriété 9: Formule des Probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B , la famille $(\mathbb{P}(B \cap A_i))_{i \in I}$ est sommable et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si de plus $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

En particulier si A et B sont deux événements avec $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}).$$

Preuve:

Soit $B \in \mathcal{T}$. Remarquons tout d'abord $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.

En appliquant l'axiome de σ -additivité à la famille d'événements deux à deux disjoints $(B \cap A_i)_{i \in I}$ on trouve

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Remarque :

On peut interpréter cette formule en disant que B est un effet provenant de différentes causes A_i .

Exemple

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré.

- S'il obtient un six, il tire une boule dans l'urne.
- Sinon, on rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation.

Sachant qu'il est presque sûr que le joueur fera un six, quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n =$ « le joueur fait son premier six lors du n -ième lancer » et $A_0 =$ « le joueur n'obtient jamais le six ». Le système complet d'événements choisi est $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec l'événement étudié est $B =$ « la boule tirée est rouge ».

On a $\mathbb{P}(A_0) = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B|A_n) = \frac{1}{n}$$

Par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n = -\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{5} \ln 6$$

II.4 Formule de Bayes

Propriété 10: Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$P_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times P_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Preuve:

Par définition on a $P_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

De plus $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times P_A(B)$, donc $P_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times P_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Propriété 11: Formule des causes

Soient $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulles. On a :

$$\forall j \in I, \quad \mathbb{P}(A_j | B) = \frac{P_{A_j}(B) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)}$$

Preuve:

Utiliser la propriété précédente et la formule des probabilités totales

Remarque :

Il n'est pas indispensable de retenir par cœur cette formule car elle découle directement de la formule de Bayes et de la formule des probabilités totales.

Exemple

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Notons :

$B =$ {l'étudiant donne la bonne réponse}

$C =$ {l'étudiant connaît la bonne réponse}

On cherche $\mathbb{P}(C|B)$. Avec ces notations, les données de l'énoncé peuvent se traduire par :

$$\mathbb{P}(C) = p, \quad \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(B|C) = 1, \quad \mathbb{P}(B|\overline{C}) = \frac{1}{m}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|\bar{C})\mathbb{P}(\bar{C})} \\ &= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}\end{aligned}$$

II.5 Indépendance d'événements

Définition 8

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque :

1. Deux événements incompatibles A et B avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ ne sont jamais indépendants. En effet $A \cap B = \emptyset$ implique $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ or $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$.
2. Tout événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre événement.
3. Tout événement presque sûr est indépendant de tout autre événement.

Propriété 12

Deux événements A et B , tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si, et seulement si, } \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Propriété 13

Soit A et B deux événements. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. A et B sont indépendants.
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants.
3. A et $\bar{B}$ sont indépendants.
4. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Preuve:

On démontre 1 implique 2. Par hypothèse, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$; En considérant la réunion disjointe $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, nous avons : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$, d'où

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$$

Donc A et $\bar{B}$ sont indépendants. L'échange des rôles de A et B dans ce raisonnement donne l'indépendance de $\bar{A}$ et B . En réutilisant le premier résultat avec $\bar{A}$ à la place de A , on obtient alors celle de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Définition 9

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité** P si pour tout $i \neq j$ A_i et A_j sont indépendants.
- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité** P ou tout simplement **indépendants pour la probabilité** P si pour tout ensemble fini $J \subset I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Attention

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux et la réciproque est fausse. Voir l'exemple suivant.

Exemple

On lance successivement 2 dés à 6 faces. On note A_1 l'événement obtenir un nombre pair avec le premier dé, A_2 l'événement obtenir un nombre impair avec le second dé et A_3 l'événement obtenir deux dés de même parité.

Ainsi, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$. On a : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$.

Mais, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \prod_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{8}$. Conclusion Il n'y a aucune implication entre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle.

Propriété 14

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour $i \in I$, on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.

Exemple: Formule d'Euler

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout entier $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_m l'événement " $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que m divise x ". On note également B l'événement " x est premier avec n ". Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n .

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k} .
2. Pour tout $m \leq n$ qui divise n , calculer la probabilité de A_m .
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B .
5. On note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x . On a donc :

$$B = \overline{A_{p_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_r}}.$$

2. Il suffit de calculer le cardinal de A_m . Mais si $n = km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \dots, km$. On a donc

$$\mathbb{P}(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$

3. Soit $i_1 < \dots < i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1, \dots, r\}$. On doit prouver que

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}}) \dots \mathbb{P}(A_{p_{i_m}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}).$$

Mais,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}}) \dots \mathbb{P}(A_{p_{i_m}}) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_{i_j}}.$$

D'autre part, puisque $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$ sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque p_{i_j} , $j = 1, \dots, m$. On en déduit que

$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

soit

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

ce qui prouve le résultat voulu.

4. Les événements $\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$\mathbb{P}(B) = \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(\overline{A_{p_j}}) = \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

5. Un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x = 1, \dots, n$, est inversible si et seulement s'il est premier avec n . On a donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$

ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

Exemple: Développement Eulérien de ζ

Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour quelle(s) valeur(s), l'application P détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement : $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* / p \mid n\}$
Exprimer simplement la probabilité de l'événement A_p .
3. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.
4. En étudiant $\mathbb{P}(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

1. La condition $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ détermine $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ avec $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Inversement, cette valeur $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ convient car on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$
2. On peut exprimer $A_p = \{pk \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ et donc

$$\mathbb{P}(A_p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{pk\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{p^s k^s} = \frac{1}{p^s}$$

3. Soit $p_1, \dots, p_N$ des nombres premiers deux à deux distincts.

$$\bigcap_{k=1}^N A_{p_k} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, p_k \mid n\}$$

Or les p_k étant des nombres premiers deux à deux distincts

$$(\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, p_k \mid n) \iff \prod_{k=1}^N p_k \mid n$$

et donc

$$\bigcap_{k=1}^N A_{p_k} = A_{\prod_{k=1}^N p_k}$$

On vérifie alors immédiatement

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N A_{p_k}\right) = \mathbb{P}\left(A_{\prod_{k=1}^N p_k}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N p_k^s} = \prod_{k=1}^N \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(A_{p_k})$$

4. On a $\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$: car tout naturel supérieur à 2 est divisible par un nombre premier. Par continuité décroissante

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Avec $\lambda = \mathbb{P}(\{1\})$, la relation demandée découle des résultats obtenus.