

TRIBU

Définition: Tribu

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $T$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ . On dit que  $T$  est une **tribu** de parties de  $\Omega$  si :

- $\Omega \in T$  et  $\forall A \in T$ , on a  $\overline{A} \in T$
- $\forall (A_i)_{i \in I}$  au plus dénombrable d'éléments de  $T$ , on a  $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$ .

Le couple  $(\Omega, T)$  s'appelle un **espace probabilisable**. Les éléments de  $T$  sont appelés des **événements** et on a :

- $\emptyset \in T$  et  $\forall A, B \in T$ , on a  $A \cup B, A \cap B$  et  $A \setminus B$  sont dans  $T$ .
- $\forall (A_i)_{i \in I}$  au plus dénombrable d'éléments de  $T$ , on a  $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$ .

Définition: Système complet d'événements

Une famille au plus dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements est dite un système complet d'événements si

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

PROBABILITÉ

Soit  $(\Omega, T)$  un espace probabilisable

Propriété: Probabilité

On appelle probabilité toute application  $\mathbb{P}$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \sigma\text{-additivité}$$

Le triplet  $(\Omega, T, \mathbb{P})$  est appelé espace probabilisé et on a :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- Soit  $A_0, \dots, A_n$  sont des événements deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k) \quad \text{Additivité finie}$$

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$  et  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ .
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
- Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  et  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite des événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{Sigma sous-additivité}$$

Définition: Événement négligeable, quasi-certain.

- On dit qu'un événement  $A$  est négligeable si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
- On dit qu'un événement  $A$  est quasi-certain si  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

LES THÉORÈMES DE PROBABILITÉS

$(\Omega, T, \mathbb{P})$  un espace probabilisé

Propriété: Continuité croissante

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

En particulier si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Propriété: Continuité décroissante

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

En particulier si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Définition: Probabilité conditionnelle

Soit  $A$  un événement avec  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Alors l'application

$$\mathbb{P}_A : \begin{cases} T & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité sur  $(\Omega, T)$  dite conditionnée à  $A$

Propriété: Formule des probabilité composées

Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite d'événements telle que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \neq 0$ . Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Propriété: Formule des probabilités totales

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements. Pour tout événement  $B$ , la famille  $(\mathbb{P}(B \cap A_i))_{i \in I}$  est sommable et  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ .

Si de plus  $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ , alors  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$ .

Propriété: Formule d'inversion ou de Bayes

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

UNIVERS AU PLUS DÉNOMBRABLE

Propriété: Univers au plus dénombrable

Soit  $\Omega$  un ensemble au plus dénombrable,  $T = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, T)$ . Alors  $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$  est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1.

Propriété: Univers au plus dénombrable

Soit  $\Omega$  un ensemble au plus dénombrable. Si  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1 alors il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

De plus, celle-ci est déterminée par

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Propriété: Cas particulier  $\Omega = \mathbb{N}$

Une probabilité sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  est déterminée par le choix de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  avec  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$

INDÉPENDANCE

Définition: Indépendance d'événements

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'événements où  $I$  est au plus dénombrable.

- On dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements **deux à deux indépendants pour la probabilité  $P$**  si pour tout  $i, j \in I$ ,

$$i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$$

- On dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements **mutuellement indépendants pour la probabilité  $P$**  si pour toute partie  $J$  finie de  $I$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Propriété

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'événements indépendants pour la probabilité  $P$  avec  $I$  est au plus dénombrable. Si pour tout  $i \in I, B_i = A_i$  ou  $\overline{A_i}$  alors  $(B_i)_{i \in I}$  est une suite d'événements indépendants pour la probabilité  $P$ .

Exemple

- Formule d'Euler;
- Développement Eulérien de  $\zeta$ .

CONTACT INFORMATION

Web: [www.elamdaoui.com](http://www.elamdaoui.com)

Email: [elamdaoui@gmail.com](mailto:elamdaoui@gmail.com)

Phone: 06 62 30 38 81