

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

$(\Omega, T, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Définition: Variable aléatoire discrète

- On appelle **variable aléatoire** définie sur (Ω, T) toute application X de Ω dans un ensemble $\mathbb{R}$ telle que: $\forall x \in X(\Omega), \quad X^{-1}([-\infty, x]) \in T$
- Si de plus $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on dit que la variable est discrète

Définition: Loi d’une variable aléatoire réelle discrète

On appelle **loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle discrète X (ou **distribution de X**) l’application $\mathbb{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$.
 $\mathbb{P}_X$ est bien déterminée par l’ensemble de couples $(x, \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Alors

- La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d’événements.
- La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable de somme 1
- Pour tout A sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l’ensemble

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

est un événement que l’on notera $[X \in A]$. et

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \mathbb{P}(X = x)$$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle **fonction de répartition** de X l’application $\mathbb{F}_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

On a aussi $\mathbb{F}_X(x) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq x}} \mathbb{P}(X = k)$

Propriété

- $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{F}_X(x) \in [0; 1]$
- $\mathbb{F}_X$ est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{F}_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_X(x) = 1$.
- $\forall a \leq b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{F}_X(b) - \mathbb{F}_X(a)$
- $\mathbb{F}_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{F}_X$ est continue à gauche en x si, et seulement si, $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Propriété: Loi d’une VARD et fonction de répartition

Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ tel que les x_i sont rangés par ordre croissant alors pour tout $x \in I$ tel que $i - 1 \in I$ (on a donc $x_{i-1} < x_i$) on a

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{F}_X(x_i) - \mathbb{F}_X(x_{i-1})$$

MOMENTS

X est une variable aléatoire réelle discrète

Définition: Espérance

On dit que X **admet une espérance** lorsque la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On appelle alors **espérance de X** , le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on parle de variable centrée

Propriété: de l’espérance

- Si $X \geq 0$ et admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
Si de plus $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ est quasi certain.
- Si X et Y admettent des espérances et $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- Si Y admet une espérance et $|X| \leq Y$, alors X aussi.

Théorème: du transfert

Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $(g(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Au quel cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Propriété

Si X admet une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Définition: Moments d’ordre r

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un **moment d’ordre r** qui est le réel $m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Propriété

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d’ordre r alors X admet des moments d’ordre s pour tout $s \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Définition: Variance

Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d’ordre 2. On appelle **variance de X** le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

On appelle **écart-type de X** le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Propriété: Formule de Huygens ou de Kœnig

Si X admet un moment d’ordre 2, alors:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriété

Si X est une VAR discrète admettant une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

LOIS DISCRÈTES USUELLES

Propriété: Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu’une VAR X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p (notée $\mathcal{B}(p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \quad P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p,$$

et on a: $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$

Propriété: Loi binomiale (ou des tirages avec remise)

Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que la VAR X suit la **loi binomiale de taille n et de paramètre p (notée $\mathcal{B}(n, p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si :

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

et on a: $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$

Propriété: Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ si :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

et on a: $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Propriété: Loi géométrique

Soit $p \in]0; 1[$. On dit qu’une VAR X suit la **loi géométrique de paramètre p (notée $\mathcal{G}(p)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

et on a: $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Théorème: Loi sans mémoire (Concours Français)

Une variable X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X est sans mémoire si, et seulement si, elle suit une loi géométrique

Propriété: Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu’une VAR X suit une **loi de Poisson (notée $\mathcal{P}(\lambda)$)** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

et on a: $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81

LOIS D’UN COUPLE.

X et Y désigneront deux variables **discrètes** définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$.

Définition

On appelle **loi du couple** (X, Y) , ou encore **loi conjointe des X et Y** , l’ensemble des couples $((x, y), \mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ où

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Propriété

Avec les notations précédentes, alors la famille $(\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable de somme 1

Définition: Lois marginales

La loi de X est appelé la **première loi marginale du couple** (X, Y) et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y) .

On peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe à l’aide des égalités

- $\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
- $\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

Définition: Loi conditionnelle

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle à $[Y = y]$ de X** l’ensemble des couples $(x, \mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

On a : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ on a :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Définition: Indépendance

X et Y sont **indépendantes** si : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

- X et Y sont indépendantes
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [X \leq x]$ et $[Y \leq y]$ sont indépendants
- $\forall A, B \subset \mathbb{R}, [X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants.

Propriété: Indépendance héritée

Si X et Y sont indépendantes et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

LOI DE PROBABILITÉ

g désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et X, Y deux variables réelles **discrètes**.

Propriété

$Z = g(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète et pour tout $z \in Z(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x, y) = z}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Propriété: Loi d’une somme

$S = X + Y$ est une variable aléatoire réelle discrète, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = s) &= \sum_{\substack{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x + y = s}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = s - x) \end{aligned}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = s) &= \sum_{\substack{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x + y = s}} \mathbb{P}(X = x) P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) P(Y = s - x) \end{aligned}$$

Propriété: Stabilité des lois binomiales

Si X et Y sont **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres (m, p) et (n, p) alors $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(m + n, p)$.

Propriété: Stabilité des lois de poisson

Si X et Y sont **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Propriété: Théorème de Transfert

La variable $Z = g(X, Y)$ a une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Propriété

Si $X_1, \dots, X_n$ admettant toutes des espérances. Alors

- $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une espérance: $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$
- Si de plus les $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ admet une espérance: $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$

FONCTION GÉNÉRATRICE

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition

On définit sa fonction génératrice G_X par

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

Propriété

[Fonctions génératrices usuelles]

- Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$, alors

$$G_X(t) = 1 - p + pt$$

- Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n$$

- Si X suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

- Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, alors

$$G_X(t) = \frac{tp}{1 - qt}$$

Propriété: Loi et fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

- X admet une espérance
- G_X est dérivable en 1.

Dans ce cas: $E(X) = G'_X(1)$

Propriété

Les assertions suivantes sont équivalentes

- X admet un moment d’ordre 2
- G_X est deux fois dérivable en 1.

Dans ce cas: $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

CONTACT INFORMATION

Web: www.elamdaoui.com

Email: elamdaoui@gmail.com

Phone: 06 62 30 38 81