

LES GÉNÉRATEURS DE GROUPE LINÉAIRE

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.
- $n \geq 2$ et $M_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées d'ordres n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On désigne par $B = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice identité.
- On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices dont le déterminant vaut 1.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, on note $L_1, \dots, L_n$ ses lignes et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes
- Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ est dite de transvection
- Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ est dite de dilatation

Partie I: Préliminaires

1. Que vaut le produit $E_{ij}E_{k\ell}$?
2. (a) Calculer le produit $T_{ij}(\lambda)A$.
(b) On interprétera le résultat obtenu sous forme d'une opération élémentaire sur les lignes de A
3. (a) Calculer le produit $AT_{ij}(\lambda)$.
(b) On interprétera le résultat obtenu sous forme d'une opération élémentaire sur les colonnes de A
4. (a) Calculer le produit $T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(-\lambda)$.
(b) En déduire que l'inverse d'une matrice de transvection est aussi une matrice de transvection et donner $T_{ij}(\lambda)^{-1}$
5. (a) Calculer le produit $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$. En déduire que l'on peut effectuer l'opération élémentaire $L_j \longleftrightarrow -L_i$ à l'aide d'un produit de transvections.
(b) Peut-on permuter deux lignes de A à l'aide d'un produit de transvections?

Partie II: Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$

On suppose dans cette partie que $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

6. On suppose qu'il existe $i \geq 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$. Déterminer un scalaire λ tel que $T_{1i}(\lambda)A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

7. Dans le cas général, en utilisant le préliminaire, justifier l'existence $A_1, \dots, A_r$, matrices de transvections telles que : $A_r \cdots A_1 A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

8. Montrer qu'il existent des matrices de transvections, $M_1, \dots, M_p$ et $N_1, \dots, N_q$ telles que $M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

9. On note $\alpha = \det(A)$. Montrer qu'il existe des matrices de transvections $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_r \cdots U_1 D_n(\alpha) V_1 \cdots V_s$$

10. En déduire que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.
11. En déduire que le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

LES GÉNÉRATEURS DE GROUPE LINÉAIRE

Partie I: Préliminaires

1. Il s'agit d'une question de cours $E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$, avec $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. (a) On écrit A dans la base canonique $A = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} E_{k\ell}$ et on tient compte de la définition de $T_{ij}(\lambda)$ et la formule de la question précédente, alors

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda)A &= (I_n + \lambda E_{ij})A = A + \lambda E_{ij}A \\ &= A + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} E_{ij}E_{k\ell} \\ &= A + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} \delta_{j,k} E_{i\ell} \\ &= A + \sum_{\ell=1}^n \lambda a_{j,\ell} E_{i\ell} \end{aligned}$$

Notons $A' = T_{ij}(\lambda)A = (a'_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$, alors

$$a'_{k,\ell} = \begin{cases} a_{k,\ell} & \text{si } k \neq i \\ a_{k,\ell} + \lambda a_{j,\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Notons $L'_1, \dots, L'_n$ les lignes de A' , alors

$$L'_k = \begin{cases} L_k & \text{si } k \neq i \\ L_i + \lambda L_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement-dit $T_{ij}(\lambda)A$ s'obtient de A par l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

3. (a) De même on a:

$$\begin{aligned} AT_{ij}(\lambda) &= A(I_n + \lambda E_{ij}) = A + \lambda A E_{ij} \\ &= A + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} E_{k\ell} E_{ij} \\ &= A + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{kj} \\ &= A + \sum_{k=1}^n \lambda a_{k,i} E_{kj} \end{aligned}$$

Notons $A' = AT_{ij}(\lambda) = (a'_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$, alors

$$a'_{k,\ell} = \begin{cases} a_{k,\ell} & \text{si } \ell \neq j \\ a_{k,\ell} + \lambda a_{k,i} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Notons $C'_1, \dots, C'_n$ les lignes de A' , alors

$$C'_\ell = \begin{cases} C_\ell & \text{si } \ell \neq j \\ C_j + \lambda C_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement-dit $AT_{ij}(\lambda)$ s'obtient de A par l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

4. (a) On a:

$$T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(-\lambda) = I_n^2 - \lambda^2 E_{ij}^2 = I_n - \lambda^2 \delta_{i,j} E_{ij} = I_n$$

LES GÉNÉRATEURS DE GROUPE LINÉAIRE

(b) Par le calcul précédent $T_{ij}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

5. (a) Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et on écrit A sous forme de lignes en posant $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A &= T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\ &= T_{ij}(1)T_{ji}(-1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\ &= T_{ij}(1) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ -L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ -L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi on peut effectuer l'opération élémentaire $L_j \longleftrightarrow -L_i$ à l'aide d'un produit de transvections.

(b) La multiplication par un produit de transvections ne change pas le déterminant par contre permuter deux lignes d'une matrice oppose le déterminant

Partie II: Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$

On suppose dans cette partie que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible.

6. On suppose qu'il existe $i \geq 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$. Le coefficient de position $(1, 1)$ de $A' = T_{1i}(\lambda)A$ vaut $a_{11} + \lambda a_{i1}$, donc pour que $a_{11} + \lambda a_{i1} = 1$ on prend $\lambda = \frac{1 - a_{11}}{a_{i1}}$

LES GÉNÉRATEURS DE GROUPE LINÉAIRE

7. Puisque A est inversible, alors la première colonne de A est non nulle. On distingue deux cas:
- S'il existe $i \geq 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$, on se ramène à la question précédente
 - Si $a_{i1} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Alors $a_{11} \neq 0$ et pour $i \geq 2$ on multiplie A à gauche par la matrice de transvection $T_{i1}(1)$. La matrice résultante est de coefficient de position $(i, 1)$ vaut $a_{i1} \neq 0$ et on se ramène au premier cas
8. D'après la question précédente il existe $A_1, \dots, A_r$, matrices de transvections telles que : $A_r \cdots A_1 A$ soit de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

On multiplie A' à gauche par $\prod_{k=2}^n T_{k1}(-a_{k1})$ puis à droite par $\prod_{k=2}^n T_{1k}(-a_{1k})$ et on trouve

$$\prod_{k=2}^n T_{k1}(-a_{k1}) A' \prod_{k=2}^n T_{1k}(-a_{1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$

On remplace A' par $A_r \cdots A_1 A$ et on trouve l'égalité souhaitée

9. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
- Pour $n = 1$, rien à démontrer.
 - Soit $n \geq 2$ et soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $M_1, \dots, M_p$ et $N_1, \dots, N_q$ telles que $M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q$ soit de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

$\det(B) = \det(A) \neq 0$, donc $B \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence il existe des matrices de transvections $P_1, \dots, P_k$ et $Q_1, \dots, Q_\ell$ telles que

$$B = P_k \cdots P_1 D_n(\alpha) Q_1 \cdots Q_\ell$$

Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, on pose

$$P'_i = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_i & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad Q'_j = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_j & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad \text{et} \quad D'_n(\alpha) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_n(\alpha) & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Les matrices P'_i et Q'_j sont de transvections. On combine ces égalités, on obtient:

$$M_p \cdots M_1 A N_1 \cdots N_q = P'_k \cdots P'_1 D'_n(\alpha) Q'_1 \cdots Q'_\ell$$

Soit

$$A = M_1^{-1} \cdots M_p^{-1} \cdot P'_k \cdots P'_1 D'_n(\alpha) Q'_1 \cdots Q'_\ell \cdot N_q^{-1} \cdots N_1^{-1}$$

Récurrence achevée

10. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Posons $\alpha = \det(A)$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_r \cdots U_1 D_n(\alpha) V_1 \cdots V_s$$

Ce qui montre que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

LES GÉNÉRATEURS DE GROUPE LINÉAIRE

11. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = 1$. D'après la question précédente il existe des matrices de transvections $U_1, \dots, U_r$ et $V_1, \dots, V_s$ telles que

$$A = U_r \cdots U_1 D_n(1) V_1 \cdots V_s = U_r \cdots U_1 \cdot V_1 \cdots V_s$$

Ce qui montre que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.