

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

Preliminaires (definitions et rappels).

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul, on note $u^p = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{p \text{ fois}}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$; on notera $P(u)$ l'application linéaire définie par :

$$\forall q \in \mathbb{N}, P(u) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_k u^k \text{ si } P(X) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_k X^k.$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de u* l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

On rappelle que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u .
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Partie I: Un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs $1, 2, \dots, n$. Ainsi, on a :

$$M = \text{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M .

1. Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

Dans toute la suite du problème, u désigne un endomorphisme de E .

Partie II: Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u , on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id).$$

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leq i \leq p$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p , une base $(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = (e_1^1, \dots, e_{n_1}^1, e_1^2, \dots, e_{n_2}^2, \dots, e_1^p, \dots, e_{n_p}^p)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v .

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

2. Pour tout entier i compris entre 1 et p , on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u . Que peut-on dire de u_i ?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u)$:

$$\text{Mat}(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & V_p \end{pmatrix}$$

avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leq i \leq p$.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leq i \leq p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

Partie III: Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geq 2$. On note r le rang de u . On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\text{Im} u \subset \text{Ker} u$. En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$.
2. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker} u$ dans E muni de la base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$, montrer que la famille $(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_r))$ est une base de $\text{Im} u$.
3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\text{Ker} u = \text{Im} u \oplus H$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow_r & \leftrightarrow_s & \leftrightarrow_r \end{matrix}$$

I_r désigne la matrice identité d'ordre r .

4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; la matrice de v dans la base $\mathcal{B}'$ est définie par blocs en posant :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow_r & \leftrightarrow_s & \leftrightarrow_r \end{matrix}$$

Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases} \quad 0_{p,q} \text{ désignant la matrice nulle à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes.}$$

5. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n et de r . Montrer que : $\dim \mathcal{C}(u) \geq \frac{n^2}{2}$.

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

Partie IV: Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

$$(1) \quad (u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0.$$

Id désigne l'application identique de E . On rappelle que :

$$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id).$$

On pose $E_1 = \text{Ker}(u - Id)$ et $E_2 = \text{Ker}(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$; on suppose de plus $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ et $n \geq 2$.

1. Montrer en rappelant le théorème utilisé que :

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}.$$

En déduire deux polynômes U et V tels que :

$$1 = U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2, \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

3. Montrer que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.

4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.

5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2 , en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\dim \mathcal{C}(u)$.

(a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.

(b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ n_1 & n_2 \end{matrix}$$

où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2 .

(c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\text{Ker}(u - 2Id))$.

(d) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ n_1 & n_2 \end{matrix}$$

et

$$V_2 N = N V_2.$$

(e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.

(f) On suppose u non diagonalisable. déterminer $\dim \mathcal{C}(U)$ en fonction de n_1 , n_2 et $\dim(\text{Ker}(u - 2Id))$.

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

Partie I: Un exemple

1. M a pour terme général $m_{i,j} = i \delta_{i,j}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de terme général $a_{i,j}$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}(M) &\iff AM = MA \iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_{j,k} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} a_{j,k} \\ &\iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \sum_{j=1}^n j a_{i,j} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n i \delta_{i,j} a_{j,k} \\ &\iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, k a_{i,k} = i a_{i,k} \\ &\iff \forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (i \neq k \implies a_{i,k} = 0) \iff A \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

2. En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$A \in \mathcal{C}(M) \iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n / A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{i,i}.$$

Une base de $\mathcal{C}(M)$ est donc : $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$, donc $\dim \mathcal{C}(M) = n$.

Partie II: Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $u(x) = \lambda_i x$.

D'une part, $v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$, d'autre part, $v(u(x)) = u(v(x))$.

Donc $u(v(x)) = \lambda_i v(x)$, ce qui montre que $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$.

Donc tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v .

2. On sait d'autre part que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u , ce qui autorise à considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$. u_i n'est autre que l'homothétie de rapport λ_i de $E_{\lambda_i}(u)$.

3. Soit $\mathbb{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$.

• Si $v \in \mathcal{C}(u)$, comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v , on sait que $B = \text{Mat}_{\mathbb{B}}(v)$ est diagonale par blocs de la forme

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$

• Réciproquement, supposons que $B = \text{Mat}(v)$ soit de la forme

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$

$\mathbb{B}$ étant en particulier une base de vecteurs propres de u , alors $A = \text{Mat}_u$ est diagonale et on peut la décomposer

$$\text{en blocs sous la forme } A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } D_i = \lambda_i I_{n_i} \text{ (puisque } u_i \text{ est une homothétie)}.$$

Comme $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, D_i V_i = (\lambda_i I_{n_i}) V_i = V_i (\lambda_i I_{n_i}) = V_i D_i$, alors $AB = BA$, donc $u \circ v = v \circ u$, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

4. Par l'isomorphisme $v \mapsto \text{Mat} v$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_n(\mathbb{C})$, on obtient que $\mathcal{C}(v)$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices ayant la forme de B .

Ces matrices dépendent de $\sum_{i=1}^p (n_i)^2$ coefficients arbitraires, donc peuvent s'écrire comme combinaison linéaire

de $\sum_{i=1}^p (n_i)^2$ matrices $E_{j,k}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$. Donc $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{i=1}^p (n_i)^2$.

5. Comme $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(n_i)^2 \geq n_i$, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geq \sum_{i=1}^p n_i = \dim E = n$ (en effet u étant diagonalisable, n est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de u).
6. Soit $\mathbb{B}$ une base quelconque de E . L'endomorphisme u de E représenté dans la base $\mathbb{B}$ par la matrice M de la partie 0 est tel que $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(M) = n$.

Partie III: Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2

1. Supposons que $u \circ u = 0$. Soit $y \in \text{Im} u$. Alors $\exists x \in E / y = u(x)$. Donc $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, d'où $y \in \text{Ker} u$.

Ainsi $\text{Im} u \subseteq \text{Ker} u$. De plus, $\text{rg} u = \dim(\text{Im} u) \geq \dim(\text{Ker} u) = n - \text{rg} u$, donc $2 \text{rg} u \leq n$, d'où $r \geq \frac{n}{2}$.

2. On remarque d'abord que puisque G est un supplémentaire de $\text{Ker} u$, alors $\dim G = n - \dim(\text{Ker} u) = \text{rg} u = r$, donc il est légitime de noter $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de G .

On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de G sur $\text{Im} u$. Ainsi l'image de la base $(e'_1, \dots, e'_r)$ de G est une base de $\text{Im} u$.

Redémontrons le théorème d'isomorphisme utilisé ci-dessus. Considérons $\tilde{u} : \begin{matrix} x \\ G \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} u(x) \\ \text{Im} u \end{matrix}$ qui est linéaire.

$\text{Ker} \tilde{u} = \text{Ker} u \cap G = \{0\}$, donc $\tilde{u}$ est injective.

$\text{Im} \tilde{u} = u(E) = u(G + \text{Ker} u) = u(G) + u(\text{Ker} u) = u(G) = \tilde{u}(G)$, donc $\tilde{u}$ est surjective, donc bijective.

3. $E = \text{Ker} u \oplus G = \text{Im} u \oplus H \oplus G$. On a donc $\dim(\text{Im} u) = \dim G = r$ et $\dim H = n - 2r = s$.

Soit $(e'_{r+1}, \dots, e'_{r+s})$ une base de H . Considérons la famille $\mathbb{B}' = (u(e'_1), \dots, u(e'_r), e'_{r+1}, \dots, e'_{r+s}, e'_1, \dots, e'_r)$.

Il s'agit d'une base de E adaptée à la somme directe $E = \text{Im} u \oplus H \oplus G$.

Alors $u(\mathbb{B}') = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, u(e'_1), \dots, u(e'_r))$, donc $\text{Mat}(u, \mathbb{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{matrix}$

4. $v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_7 & A_8 & A_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases}.$

Ainsi $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $\text{Mat}(v, \mathbb{B}')$ de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

5. Le nombre de coefficient arbitraires de cette matrice est égal à $r n + s(s+r) = n r + (n-2r)(n-r) = n^2 + 2r^2 - 2r n$.

Ainsi $\dim \mathcal{C}(u) = (n-r)^2 + r^2$.

En posant $f_n(x) = 2x^2 - 2nx + n^2$, alors $f'_n(x) = 2(2x - n)$, donc f_n admet un minimum pour $x = \frac{n}{2}$ égal à $\frac{n^2}{2}$. Ainsi $\dim \mathcal{C}(u) \geq \frac{n^2}{2}$.

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

Partie IV: Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1)

1. Les polynômes $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X - 2)^2$ sont premiers entre eux.

De plus $(P_1 P_2)(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = (u - \text{Id}) \circ (u - 2 \text{Id})^2 = 0$.

Le théorème de décomposition des noyaux donne : $\text{Ker}((P_1 P_2)(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$, c'est à dire :
 $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2 \text{Id})^2 = E_1 \oplus E_2$.

Remarquons tout de suite que E_1 et E_2 étant des noyaux de polynômes en u sont stables par u .

2. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $F(X)$ est de la forme : $F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-2}$.

. On multiplie par $X - 1$, puis on remplace X par 1, ce qui donne : $\frac{1}{(1-2)^2} = a + b \times 0 + c \times 0$, donc $\underline{a = 1}$.

. On multiplie par $(X - 2)^2$, puis on remplace X par 2, ce qui donne : $\frac{1}{2-1} = a \times 0 + b + c \times 0$, donc $\underline{b = 1}$.

. Pour $X := 0$, on trouve que $\underline{c = -1}$.

$$\text{Donc } F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-2)^2} - \frac{1}{X-2} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2}.$$

$$\text{Ainsi } 1 = \frac{(X-1)(X-2)^2 F(X)}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{(X-2)^2 + (X-1)(3-X)}{(X-1)(X-2)^2}, \text{ donc } \boxed{V(X) = 1 \text{ et } U(X) = 3-X}.$$

3. On en déduit que : $\text{Id} = U(u) \circ (u - \text{Id}) + V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2$.

$$\text{Donc } \forall x \in E, x = [U(u) \circ (u - \text{Id})](x) + [V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2](x).$$

$$\text{Posons } x_1 = [V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2](x) \text{ et } x_2 = [U(u) \circ (u - \text{Id})](x). \text{ Ainsi } x = x_1 + x_2.$$

Vérifions par exemple que $x_1 \in E_1 = \text{Ker}(P_1(u)) = \text{Ker}(u - \text{Id})$. On rappelle que des polynômes en u commutent.

$$\text{On a : } (u - \text{Id})(x_1) = [(u - \text{Id}) \circ V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2](x) = V(u)((u - \text{Id}) \circ (u - 2 \text{Id})^2)(x) = V(u)(0) = 0.$$

On montre de même que $x_2 \in E_2$.

On a donc décomposé x en $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On en déduit que $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$.

$$\text{Ainsi } \forall x \in E, p_1(x) = [V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2](x), \text{ donc } \underline{p_1 = V(u) \circ (u - 2 \text{Id})^2 = (u - 2 \text{Id})^2 = u^2 - 4u + 4 \text{Id}}.$$

$$\text{De même } \underline{p_2 = U(u) \circ (u - \text{Id}) = (3 \text{Id} - u) \circ (u - \text{Id}) = -u^2 + 4u - 3 \text{Id}}.$$

L'intérêt de ces égalités est que p_1 et p_2 s'expriment comme des polynômes en u .

4. Montrons que $d = p_1 + 2p_2$ est diagonalisable.

Solution matricielle Dans une base $\mathbb{B}$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$; $\text{Mat} d = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2I_{n_2} \end{pmatrix}$ ce qui montre que $d = p_1 + 2p_2$ est diagonalisable.

Autre solution p_1 et p_2 sont des projecteurs associés, donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

$$\text{On a : } \text{Id} = p_1 + p_2, d = p_1 + 2p_2 \text{ et } d^2 = p_1^2 + 2p_1 \circ p_2 + 2p_2 \circ p_1 + 4p_2^2 = p_1 + 4p_2.$$

$$\text{On tire } p_1 = 2d - d^2 \text{ et } p_2 = \frac{d^2 - d}{2}, \text{ donc } \text{Id} = p_1 + p_2 = -\frac{d^2}{2} + \frac{3d}{2}, \text{ d'où } d^2 - 3d + 2 \text{Id} = 0.$$

Ainsi d annule le polynôme $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ scindé à racines simples, donc d est diagonalisable.

5. $w = u - d$ avec $d = p_1 + 2p_2 = (u^2 - 4u + 4 \text{Id}) + 2(-u^2 + 4u - 3 \text{Id}) = -u^2 + 4u - 2 \text{Id}$.

$$\text{Donc } w = u^2 - 3u + 2 \text{Id} = \underline{(u - \text{Id}) \circ (u - 2 \text{Id})}.$$

$$\text{On en déduit que } w^2 = (u - \text{Id}) \circ (u - \text{Id}) \circ (u - 2 \text{Id})^2 = (u - \text{Id}) \circ 0 = 0.$$

Ainsi, ou bien $w = 0$, ou bien $w \neq 0$ et $w^2 = 0$, c'est à dire w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\mathcal{C}(u)$.

(a) * Si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v commute avec tout polynôme en u , donc en particulier avec $d = -u^2 + 4u - 2 \text{Id}$ et $w = u^2 - 3u + 2 \text{Id}$.

* Si v commute avec d et avec w , alors v commute avec $u = d + w$.

$$\text{Ainsi : } \underline{v \in \mathcal{C}(u) \iff v \in \mathcal{C}(d) \text{ et } v \in \mathcal{C}(w)}.$$

COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

- (b) w est un polynôme en u , donc $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(u - 2 \text{Id})$ sont stables par w .

De plus $w = (u - 2 \text{Id}) \circ (u - \text{Id})$, d'où $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker} w$, donc la restriction de w à E_1 est nulle.

En outre, $\forall x \in E_2 = \text{Ker}(u^2 - 4u + 4 \text{Id})$, $w(x) = (u^2 - 3u + 2 \text{Id})(x) = (u^2 - 4u + 4 \text{Id})(x) + (u - 2 \text{Id})(x) = (u - 2 \text{Id})(x)$, donc w et $u - 2 \text{Id}$ coïncident sur E_2 .

En se plaçant sur une base $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2''$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, alors w admet dans

cette base une représentation matricielle diagonale par blocs de la forme $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{matrix}$ où l'on sait $\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ n_1 & n_2 \end{matrix}$

que N est la matrice dans la base $\mathbb{B}_2$ de l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par w , donc aussi par $u - 2 \text{Id}$.

Puisque $u = d + w$, il en résulte que $\text{Mat} u = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} + N \end{pmatrix}$.

Remarque : puisque $w^2 = 0$, on a $N^2 = 0$.

- (c) On a $\text{Ker} w_2 = E_2 \cap \text{Ker}(u - 2 \text{Id}) = \text{Ker}(u - 2 \text{Id})$ car $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}) \subset \text{Ker}(u - 2 \text{Id})^2 = E_2$.

Donc $\text{rg} N = \text{rg} w_2 = \dim E_2 - \dim(\text{Ker} w_2) = n_2 - \dim(\text{Ker}(u - 2 \text{Id}))$.

- (d) * Si v commute avec u , alors v stabilise $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(u - 2 \text{Id})$, alors $\text{Mat} v$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$. En traduisant que $\text{Mat} u$ et $\text{Mat} v$ commutent, on trouve que $V_2 N = N V_2$.

* Réciproquement si $\text{Mat} u$ est de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ avec $V_2 N = N V_2$, on constate immédiatement que $\text{Mat} u$ et $\text{Mat} v$ commutent, donc u et v commutent, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.

- (e) * Si u est diagonalisable, alors $u - 2 \text{Id}$ l'est aussi et on sait l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par $u - 2 \text{Id}$ est diagonalisable. Donc $N = \text{Mat}(w_2, \mathbb{B}_2)$ est diagonalisable. Or N est nilpotente, donc ses valeurs propres sont toutes nulles (car si $NX = \lambda.X$ et $X \neq 0$, alors $0 = N^2.X = \lambda^2.X$, donc $\lambda = 0$).

Ainsi N est semblable à la matrice diagonale nulle, donc $N = 0$.

* Si $N = 0$, alors $w = 0$, donc $u = d$ est diagonalisable.

- (f) On suppose u non diagonalisable, donc $N \neq 0$, donc N est nilpotente d'indice égal à 2.

Posons $p = \dim(\text{Ker}(u - 2 \text{Id}))$. Ainsi le rang de N est $r_2 = n_2 - p$.

Puisque N est nilpotente d'indice 2, d'après le II.5, le commutant de N a pour dimension $(n_2 - r_2)^2 + r_2^2 = p^2 + (n_2 - p)^2$.

De la caractérisation obtenue au (d), on déduit que $\dim \mathcal{C}(u) = n_1^2 + p^2 + (n_2 - p)^2$.