

CROCHET DE LIE

Dans tout le problème

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $M_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ se note I_n
- Pour toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $\text{Tr}(A)$ sa trace et $\text{rg}(A)$ son rang.
- Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$; on considère l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\Phi_{A,B} : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto AM + MB \end{cases}$$

- Si $A = B$, $\Phi_{A,B}$ sera notée simplement Φ_A

Partie I

1. Soit $C \in M_n(\mathbb{K})$; montrer que $\text{Sp}(C) = \text{Sp}(C^T)$
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp $W \in M_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp b).
 - (a) Expliciter les coefficients de la matrice V^tW en fonction des coefficients $v_1, \dots, v_n$ de V et $w_1, \dots, w_n$ de W , et en déduire que la matrice V^tW n'est pas nulle.
 - (b) Montrer que la matrice V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
4. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k M = M(\lambda I_n - B)^k$
 - (b) En déduire que pour tout polynôme P , à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.
 - (c) On suppose que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit

$$\chi_A = \prod_{\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}$$

- i. Montrer que $M\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
 - ii. En déduire qu'il existe $a \in \text{Sp}(\mathbb{K})$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.
5. Conclure que si le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$
6. Soient $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Z_1, \dots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ sont tous nuls.
7. On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \dots, U_n)$ et $(W_1, \dots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $(U_i^t W_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
8. On suppose que les deux matrices A et B sont réelles et symétriques d'ordre n .
 - (a) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (M, N) \longmapsto \text{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$
 - (b) Montrer que si C et D sont deux matrices d'ordre n , alors $\text{Tr}(DC) = \text{Tr}(CD)$
 - (c) Montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Partie II

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini à la fin de la partie précédente. On considère une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. C'est-à-dire S est symétrique et

— **Positive** : Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$;

— **Définie** : Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a ${}^tXSX = 0 \Rightarrow X = 0$

9. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives.

10. En déduire Φ_S est symétrique et pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\langle \Phi_S(X), X \rangle \geq 0$ et $\langle \Phi_S(X), X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$.
On dit alors que l'endomorphisme symétrique Φ_S est défini positif

11. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$; montrer que X est symétrique si et seulement si $\Phi_S(X)$ l'est aussi.

12. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.

(a) On suppose que A est définie positive; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

(b) Soit $U \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tUAU$ en fonction de a, b, c, x et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive.

(c) On suppose ici que A est définie positive. On considère une matrice $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$. Calculer la matrice $\Phi_A(X_\lambda)$ et montrer qu'on peut trouver des valeurs de b et λ pour lesquelles cette matrice ne soit pas définie positive.

13. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$S = PDP^{-1}$$

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice $D : D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

14. Dans cette question, on considère une matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = \Phi_S(X)$; on pose aussi $Y = P^{-1}XP$ et $N = P^{-1}MP$. On note $n_{i,j}$ les coefficients de la matrice N et $y_{i,j}$ ceux de Y .

(a) Vérifier que $\Phi_D(Y) = N$ et exprimer les coefficients $y_{i,j}$ à l'aide des λ_k et des coefficients de la matrice N .
On suppose désormais que la matrice M est symétrique et définie positive.

(b) Montrer que la matrice N est symétrique et définie positive.

(c) Soit U un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \dots, u_n$.

i. Montrer que ${}^tUYU = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$

ii. Soit $\alpha > 0$; montrer que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

iii. On note $U(s)$ le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}}, \dots, u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}}$, $s \in]0, 1]$.

Justifier que l'application $s \mapsto {}^tU(s)NU(s)$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

iv. Exprimer l'intégrale de la fonction précédente en fonction de ${}^tUYU$ et en déduire que si U est non nul, alors ${}^tUYU > 0$.

(d) Conclure que la matrice X est symétrique définie positive.

Partie III

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on étudie la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ dans le cas où $B = -A$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de l'une de ses normes.

15. On suppose que $A = \Delta$ où Δ est la matrice $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts.

(a) On prend $n = 2$; déterminer $\text{Ker}(\Phi_{A,-A})$; quelle est sa dimension?

(b) On revient au cas général.

Déterminer $\text{Ker}(\Phi_{A,-A})$; quelle est sa dimension?

16. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

CROCHET DE LIE

- (a) Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
- (b) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que la dimension de $\text{Ker}(\Phi_{A,-A})$ est égale à n .
17. (a) Montrer que l'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
- (b) Soit $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit I et J deux parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de même cardinal q .
Montrer que l'application $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \det((a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J})$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
18. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$
- (a) Justifier que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- On pose $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$ où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- On pose $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \lambda_j \\ \inf \{ |\lambda_i - \lambda_j|, \mid \lambda_i \neq \lambda_j \} & \end{cases}$ et on définit la suite de matrices $(T_k)_{k \geq 1}$ par $T_k = T + \Delta_k$, où
- $\Delta_k = \text{diag}\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha}{2k}, \dots, \frac{\alpha}{nk}\right)$
- (b) Montrer que T_k admet n valeurs propres distinctes deux à deux.
- (c) Montrer que $A_k = PT_kP^{-1}$ est diagonalisable et déterminer la limite de la suite $(A_k)_{k \geq 1}$
- (d) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
19. Soit r un entier naturel, avec $r \leq n$. On admet les deux résultats suivant : $A \in M_n(\mathbb{C})$;
- Si le rang de A est égal à r alors il existe une sous-matrice de la matrice A qui est inversible d'ordre r .
 - S'il existe une sous-matrice de la matrice A , qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .
- (a) Montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{rg}(C) > r\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$.
- (b) Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices éléments de $M_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$, convergeant vers une matrice A . Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à s .
20. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\dim \text{Ker}(\Phi_{A,-A}) \geq n$.

CROCHET DE LIE

Partie I

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; on a $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(C) \iff \det(C - \lambda I_n) = 0 \iff \det({}^t C - \lambda I_n) = 0 \iff \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}({}^t C)$.

NB : $\det(M) = \det({}^t M) \quad \forall M \in M_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{A,B}(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)B \\ &= \alpha AM + AN - \alpha MB - NB \\ &= \alpha(AM - MB) + AN - NB \\ &= \alpha\Phi_{A,B}(M) + \Phi_{A,B}(N)\end{aligned}$$

Donc $\Phi_{A,B}$ est linéaire

3. (a) En notant les coefficients de la matrice $V^t W$ par $(V^t W)_{i,j}$ on a $(V^t W)_{i,j} = v_i w_j$. D'autre part $V \neq 0$ car vecteur propre, donc $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_i \neq 0$, de même $\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $w_j \neq 0$, d'où $\exists i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $(V^t W)_{i,j} = v_i w_j \neq 0$ et donc la matrice $V^t W$ est non nulle.

(b) On a $AV = aV$ et ${}^t BW = bW$ donc

$$\Phi_{A,B}(V^t W) = AV^t W + V^t WB = (a + b)V^t W$$

Or $V^t W \neq 0$ donc $V^t W$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a + b$.

4. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

— Le résultat est évidemment vrai pour $k = 0$;

Noter bien que $M^0 = (\alpha I_n + B)0 = I_n$

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et montrons que $A^{k+1} M = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$. On a d'abord $\Phi_{A,B}(M) = \alpha M$, donc $AM - MB = \alpha M$ et on trouve $AM = M(\alpha I_n + B)$. Donc $A^{k+1} M = AA^k M = AM(\alpha I_n + B)^k = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$.

(b) Soit un polynôme P , à coefficients dans $\mathbb{K}$, on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et donc

$$P(A)M = \sum_{k=0}^d a_k A^k M = \sum_{k=0}^d a_k M(\alpha I_n + B)^k = M \sum_{k=0}^d a_k (\alpha I_n + B)^k = MP(\alpha I_n + B)$$

(c) i. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $M\chi_A(\alpha I_n + B) = 0$ notons $S = \chi_A(\alpha I_n + B)$. Si S était inversible $MS = 0 \implies MSS^{-1} = M = 0$ ce qui est impossible puisque M est un vecteur propre, donc la matrice $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible.

ii. Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible. Or $\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} ((\alpha - \mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible donc $\exists a \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\alpha - a)I_n - B$ n'est pas inversible.

5. Supposons que le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

— Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B})$. Puisque χ_A est scindé, alors il existe $a \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible et donc $\lambda - a \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$, et par suite il existe $b \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda - a = b$ d'où $\lambda = a + b$, soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$.

— Inversement, d'après la question (??) on voit que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B})$ D'où l'égalité.

6. On propose deux démonstrations :

— **Première démonstration :**

$\Rightarrow$) Supposons que $\sum_{i=1}^p Y_i {}^t Z_i = 0$. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on multiplie cette égalité à droite par un $\bar{Z}_j$, d'où

$\sum_{i=1}^p a_i Y_i = 0$ où $a_i = {}^t Z_i \bar{Z}_j$. Or $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^t Z_j \bar{Z}_j = \|Z_j\|_2^2 = 0$ et donc $Z_j = 0$.

CROCHET DE LIE

⇐) La réciproque est bien évidente.

— **Deuxième démonstration** : Posons $Z_i = \begin{pmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,n} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. La matrice $Y_i^t Z_i = [z_{i,1} Y_i, \dots, z_{i,n} Y_i] \in M_n(\mathbb{K})$ est la matrice de vecteurs colonnes $z_{i,1} Y_i, \dots, z_{i,n} Y_i$

⇒) Supposons que $\sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0$, alors $\left[\sum_{i=1}^p z_{i,1} Y_i, \dots, \sum_{i=1}^p z_{i,n} Y_i \right] = 0$, puis $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^p z_{i,k} Y_i = 0$. Or $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, z_{i,k} = 0$. Soit $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, Z_i = 0$

⇐) La réciproque est bien évidente.

7. La famille $(U_i^t W_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que $(U_i^t W_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ or elle est de cardinal n^2 égale à la dimension de $M_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de scalaires, alors

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \implies \sum_{i=1}^n U_i^t Z_i = 0 \quad \text{où} \quad Z_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} W_j$$

d'après la question précédente $Z_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} W_j = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Or $(W_j)_{1 \leq j \leq n}$ est aussi libre donc $a_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

8. (a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie de $M_n(\mathbb{R})^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

— **Symétrie** : $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N) = \text{Tr}({}^t ({}^t M N)) = \text{Tr}({}^t N M) = \langle N, M \rangle$.

— **Bilinéarité** : Soit $M, N, P \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\langle M + \lambda N, P \rangle = \text{Tr}({}^t M P + \lambda {}^t N P) = \text{Tr}({}^t M P) + \lambda \text{Tr}({}^t N P) = \langle M, P \rangle + \lambda \langle N, P \rangle$$

Et par symétrie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

— **Positivité** : Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a $\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^t M M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$ d'où $\langle M, M \rangle \geq 0$.

— **Définie** : L'égalité $\langle M, M \rangle = 0$ donne $\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2 = 0$, donc les $m_{i,j}$ sont tous nuls ce qui implique que $M = 0$

Ainsi les propriétés du produit scalaire sont toutes vérifiées.

(b) En notant $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a :

$$\text{Tr}(CD) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n d_{ji} c_{ij} \right) = \text{Tr}(DC)$$

(c) Pour montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ il faut montrer que $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})^2, \langle \Phi_{A,B}(X), Y \rangle = \langle X, \Phi_{A,B}(Y) \rangle$. Soit $(X, Y) \in M_n^2(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{A,B}(X), Y \rangle &= \langle AX, Y \rangle + \langle XB, Y \rangle \\ &= \langle X, AY \rangle + \langle X, YB \rangle \end{aligned}$$

Car $\langle AX, Y \rangle = \text{Tr}({}^t X^t AY) = \text{Tr}({}^t X AY) = \langle X, AY \rangle$ de même on montre que $\langle XB, Y \rangle = \langle X, YB \rangle$. Puis

$$\langle \Phi_{A,B}(X), Y \rangle = \langle X, AY \rangle + \langle X, YB \rangle = \langle X, \Phi_{A,B}(Y) \rangle$$

Partie II

CROCHET DE LIE

9. Soit λ valeur propre de S et X un vecteur propre associé, donc $SX = \lambda X$ d'où ${}^tXSX = \lambda\|X\|_2^2$. Or ${}^tXSX > 0$ et $X \neq 0$ car vecteur propre donc $\|X\|_2^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$.
10. Les valeurs propres Φ_S sont de la forme $\lambda + \mu$ où λ, μ des valeurs propres de S donc strictement positives, ainsi les valeurs propres Φ_S sont strictement positives. Notons $\lambda_{\min}$ la plus petite valeur propre de Φ_S , alors pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\langle \Phi_S(X), X \rangle \geq \lambda_{\min} \|X\|^2 \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $\lambda_{\min} \|X\|^2 = 0$ si, et seulement si, $X = 0$.
11. $\Rightarrow$ Supposons que X est symétrique, alors

$${}^t\Phi_S(X) = {}^t(SX + XS) = {}^tX{}^tX + {}^tS{}^tX = SX + XS = \Phi_S(X)$$

Donc $\Phi_S(X)$ est symétrique

$\Leftarrow$ Supposons $\Phi_S(X)$ symétrique donc ${}^tXS + S{}^tX = SX + XS$ d'où $\Phi_S({}^tX - X) = ({}^tX - X)S + S({}^tX - X) = 0$, donc ${}^tX - X \in \text{Ker}\Phi_S$. Or $\text{Sp}(\Phi_S) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc Φ_S inversible et, par suite, ${}^tX - X = 0$ et donc X symétrique.

12. (a) Pour $X = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, on a $a = {}^tXAX > 0$, en plus A est définie positive, donc ses valeurs propres sont strictement positives et donc son déterminant, qui vaut le produit de ses valeurs propres, est strictement positif, soit $\det(A) = ac - b^2 > 0$.

(b) On a

$${}^tUAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left[\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + y^2 \frac{ac - b^2}{a^2} \right]$$

alors

$$- {}^tUAU \geq 0$$

$- {}^tUAU = 0$ entraîne la somme $\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + y^2 \frac{ac - b^2}{a^2}$ de deux nombres positifs est nulle et par suite les deux termes $\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2$ et $y^2 \frac{ac - b^2}{a^2}$ sont nuls, soit $y = 0$ et $x = -\frac{b}{a}y = 0$. Ainsi A est définie positive.

(c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est supposée définie positive, $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_A(X_\lambda) &= AX_\lambda + X_\lambda A \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda a & (\lambda + 1)b \\ (\lambda + 1)b & 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $\det \Phi_A(X_\lambda) = 4\lambda ac - (\lambda^2 + 1)^2 b^2$. Comme $\lambda > 0$, on a, par la question (??), $\Phi_A(X_\lambda)$ n'est pas définie positive si, et seulement si, $4\lambda ac - (\lambda^2 + 1)^2 b^2 \leq 0$ si, et seulement, si $\frac{4\lambda}{(1 + \lambda)^2} ac \leq b^2$ et puisque

$$\frac{4\lambda}{(1 + \lambda)^2} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0, \text{ on choisit } \lambda \text{ et } b \text{ tels que } \frac{4\lambda}{(1 + \lambda)^2} ac \leq b^2 < ac$$

13. S est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral, elle est orthodagonalisable.
14. (a) $\Phi_D(Y) = DY + YD = P^{-1}SP P^{-1}XP + P^{-1}X P P^{-1}SP = P^{-1}\Phi_S(X)P = P^{-1}MP = N$.
D'autre part, on a $DY = (\lambda_i y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $YD = (y_{i,j} \lambda_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, donc $DY + YD = ((\lambda_i + \lambda_j) y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Or $DY + YD = \Phi_D(Y) = N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors l'égalité : $y_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}$.
- (b) $P^{-1} = {}^tP$ car P matrice orthogonale donc $N = {}^tPMP$ d'où ${}^tN = {}^tP{}^tMP = {}^tPMP$ car M symétrique.
En plus soit X un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXNX = {}^t(PX)M(PX) \geq 0$ car M positive avec égalité si, et seulement si, $PX = 0$ car M est définie. L'assertion $PX = 0$ donne $X = 0$, car P est inversible

CROCHET DE LIE

- (c) i. Le calcul matriciel montre que ${}^tUYU = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i y_{i,j} u_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.
- ii. Soit $\alpha > 0$, l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est continue et positive sur $]0, 1]$. Pour $0 < x \leq 1$ on a

$$\int_x^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1-x^\alpha}{\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}$$

ce qui montre que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha}$

- iii. Le calcul matriciel donne ${}^tU(s)NU(s) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s^{\lambda_i + \lambda_j - 1} n_{i,j} u_i u_j$ est intégrable en tant que somme finie de fonctions intégrables les $\lambda_i + \lambda_j$ joueront le rôle de α dans la question précédente.

- iv. $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s)) ds = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j = {}^tUYU$ or N symétrique définie positive donc ${}^tU(s)NU(s) > 0$ car $U(s) \neq 0$
en particulier $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s)) ds = {}^tUYU > 0$.

- (d) On a $X = PY^tP$, soit U un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tUXU = ({}^tPU)Y({}^tPU) \geq 0$ avec égalité si, et seulement, si ${}^tPU = 0$ car la matrice Y est définie positive la matrice X est définie positive. D'autre part $M = \Phi_S(X)$ est symétrique donc X aussi d'après la question (??).

Partie III

15. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$X \in \text{Ker}(\Phi_{A,-A}) \iff AX = XA$$

$$\iff \begin{pmatrix} \mu_1 a & \mu_1 b \\ \mu_2 c & \mu_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 a & \mu_2 b \\ \mu_1 c & \mu_2 d \end{pmatrix}$$

$$\iff (\mu_1 - \mu_2)c = (\mu_1 - \mu_2)b = 0$$

$$\iff b = c = 0 \iff X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \mathbf{Vect}(E_{11}, E_{22})$$

donc $\text{Ker}(\Phi_{A,-A}) = \mathbf{Vect}(E_{11}, E_{22})$, avec $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$, et, par suite, $\dim \text{Ker}(\Phi_{A,-A}) = 2$.

- (b) Soit $X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, le calcul matriciel donne $AX = (\mu_i x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, $XA = (\mu_j x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, en particulier

$$X \in \text{Ker}(\Phi_{A,-A}) \iff AX - XA = 0$$

$$\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\mu_i - \mu_j)x_{i,j} = 0$$

$$\iff \forall i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{i,j} = 0$$

$$\iff X \in D_n(\mathbb{C})$$

Donc $\text{Ker}(\Phi_{A,-A})$ est formé de matrices diagonales et sa dimension est égale à n .

16. (a) A admet n vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes deux à deux, donc ces vecteurs propres constituent une famille libre, puis une base de $M_{n,1}(\mathbb{C})$
- (b) Soit P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = P^{-1}DP$, on a

$$X \in \text{Ker}(\Phi_{A,-A}) \iff AX = XA \iff P^{-1}DPX = XP^{-1}DP$$

$$\iff DPXP^{-1} = PXP^{-1}D$$

$$\iff PXP^{-1} \in \text{Ker}(\Phi_{D,-D})$$

$$\iff X \in P^{-1}\text{Ker}(\Phi_{D,-D})P$$

CROCHET DE LIE

d'où $\text{Ker}(\Phi_{A,-A}) = P^{-1}\text{Ker}(\Phi_{D,-D})P$ est isomorphe à $\text{Ker}\Phi_{D,-D}$ à l'aide de l'isomorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ donc sont de même dimension or D diagonale dont les éléments de la diagonale sont deux à deux distincts, donc $\dim \text{Ker}(\Phi_{D,-D}) = n$ d'où $\dim(\text{Ker}\Phi_{A,-A}) = n$ aussi.

17. (a) Notons $\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C})) \\ A & \longmapsto \Phi_{A,-A} \end{cases}$ et montrons que Φ est linéaire.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, montrons que $\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$. Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda A + B)(X) &= \Phi_{\lambda A + B, -\lambda A - B}(X) \\ &= (\lambda A + B)X - X(\lambda A + B) \\ &= \lambda AX + BX - \lambda XA - XB \\ &= \lambda(AX - XA) + BX - XB \\ &= \lambda\Phi(A)(X) + \Phi(B)(X) \\ &= [\lambda\Phi(A) + \Phi(B)](X) \end{aligned}$$

Ainsi Φ est linéaire, avec $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc elle est continue sur $M_n(\mathbb{C})$

- (b) L'application $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \det((a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J})$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$ car elle est polynomiale en les coefficients de A

18. (a) Toute matrice complexe est trigonalisable

- (b) Soit $k \geq 1$, notons que le spectre de T_k est $\left\{ \lambda_i + \frac{\alpha}{ik}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. Soit $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

— Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\lambda_i + \frac{1}{ik} \neq \lambda_j + \frac{1}{jk}$

— Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $\lambda_i + \frac{1}{ik} = \lambda_j + \frac{1}{jk}$ entraîne $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{\alpha}{k} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| < \frac{\alpha}{k} \leq \alpha$

ce qui contredit la définition de α et donc les valeurs propres T_k sont deux à deux distinctes

- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_k est semblable à T_k , donc elle est diagonalisable de n valeurs propres distinctes deux à deux. En outre $T_k = T + \Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} T$ et par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, alors $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$

- (d) Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, la suite construite $(A_k)_{k \geq 1}$ est une suite de matrices admettant n valeurs propres distinctes qui tend vers A . D'où la densité demandée

19. (a) Pour montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) > r\}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que son complémentaire $\mathcal{F}_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) \leq r\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$.

On définit la fonction f de $M_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(A) = \sum_{\substack{B \text{ extraite de } A \\ \text{Ordre de } B > r}} |\det(B)|$$

La somme étant prise sur toutes les matrices B extraites de A et d'ordre supérieure strictement à r . L'application f est continue sur $M_n(\mathbb{C})$, d'après la question (??), et on a $A \in \mathcal{F}_r$ si et seulement si $f(A) = 0$, ou encore $\mathcal{F}_r = f^{-1}(\{0\})$ qui est l'image réciproque d'un fermé par une application continue

- (b) Si $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $M_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A avec les notations de la question précédente, $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p \in \mathcal{F}_s$, qui est fermé donc $A = \lim A_p \in \mathcal{F}_s$. D'où le rang de A est inférieur ou égal à s .

20. Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, et $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, convergente vers A . D'autre part l'application $M \mapsto \Phi_{M,-M}$ est continue donc $\Phi_{A_p,-A_p}$ converge vers $\Phi_{A,-A}$. Notons $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s$ donc $s = n^2 - \dim \text{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p})$ (d'après la formule du rang), et d'après la question (??) on a $\dim \text{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p}) = n$ donc $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s = n^2 - n$ et enfin d'après la question (??) on a $\text{rg}(\Phi_{A,-A}) \leq n^2 - n$, en utilisant encore une fois la formule du rang, mais cette fois pour $\Phi_{A,-A}$ on obtient que la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .