

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD. APPLICATIONS

E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension q et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E .

Partie I: Décomposition de Dunford

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que :

$$f = d + n \quad \text{et} \quad \begin{cases} d \circ n = n \circ d \\ d \text{ diagonalisable} \\ n \text{ nilpotent} \end{cases}$$

Pour cela on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique

$$\chi_f = \det(X \text{Id}_E - f) = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

les λ_j sont les valeurs propres propres propres distinctes de f de multiplicité respectives α_j .

On note $Q_j = (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ et $F_j = \text{Ker}(Q_j(f))$, pour $1 \leq j \leq k$

1. Montrer que $E = \bigoplus_{j=1}^k F_j$

2. (a) Montrer qu'il existe des polynômes $R_1, \dots, R_k$ tels que : $\sum_{j=1}^k R_j \frac{\chi_f}{Q_j} = 1$

(b) On note $p_j = \left(R_j \frac{\chi_f}{Q_j} \right)(f)$, pour $1 \leq j \leq k$. Montrer que $\sum_{j=1}^k p_j = \text{Id}_E$

3. Soit r, s deux entiers distincts de $\llbracket 1, k \rrbracket$

(a) Montrer que $F_r \subset \text{Ker}(p_s)$ et que $\forall x \in F_r$, on a $p_r(x) = x$

(b) En déduire que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'application p_j est la projection sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k F_i$

4. Montrer que l'endomorphisme $d = \sum_{j=1}^k \lambda_j p_j$ est diagonalisable.

5. On note $n = f - d$. Montrer que l'endomorphisme n est nilpotent.

6. Soit $d' \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $d' \circ f = f \circ d'$

(a) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, le sous-espace F_j est stable par d'

(b) En déduire que d et d' sont codiagonalisables.

7. Montrer que la décomposition $f = d + n$ telle que: $\begin{cases} d \circ n = n \circ d \\ d \text{ diagonalisable} \\ n \text{ nilpotent} \end{cases}$ est unique.

Elle est appelée la décomposition de Dunford de f .

8. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$, il existe un couple (D, N) unique tel que:

$$\begin{cases} A = D + N \\ DN = ND \\ D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \end{cases}$$

La décomposition $A = D + N$ avec $\begin{cases} DN = ND \\ D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \end{cases}$ est appelée la décomposition de Dunford de A

Partie II: Endomorphismes semi-simples

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD. APPLICATIONS

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si pour tout sous-espace F de E stable par f il existe un supplémentaire de F dans E stable par f .

L'objectif de cette partie est de montrer que tout endomorphisme de E semi-simple est diagonalisable. Pour cela on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ un endomorphisme semi-simple et $f = d + n$ sa décomposition de Dunford.

9. Soit $x \in E \setminus \text{Ker}(n)$. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, n^k(x) = 0\}$ est non vide et majoré
10. En déduire que si $x \in E \setminus \text{Ker}(n)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^m(x) \neq 0$ et $n^m(x) \in \text{Ker}(n)$
11. En déduire qu'il existe un sous-espace F de E stable par f tel que $E = F + \text{Ker}(n)$
12. Montrer que F est stable par n .
13. En déduire que $F = \{0\}$
14. Conclure que f est diagonalisable.

Partie III: Trace et nilpotence

Dans cette partie on se propose de montrer que pour toute matrice A de $M_q(\mathbb{C})$, on a l'équivalence

A est nilpotente, si, et seulement si, $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

15. Montrer que si $A \in M_q(\mathbb{C})$ est nilpotente alors $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
16. Inversement, soit $A \in M_q(\mathbb{C})$ telle que : $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A

- (a) Vérifier que $A^p N^\ell$ est nilpotente pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$
- (b) En déduire que $\text{Tr}(D^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
- (c) Montrer que $D = 0$
- (d) En déduire que A est nilpotente.

Partie IV: Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \quad \begin{cases} \text{comm}_B(X) = BX - XB \\ \text{conj}_P(X) = PXP^{-1} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

17. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P$.
Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.
18. Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A .
19. En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.
20. Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\text{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.
21. Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.
D'après la partie I, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\text{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent: $dn = nd$.
22. Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

Partie V: Rayon spectral

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD. APPLICATIONS

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle rayon spectral de A , le réel positif $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$. On se propose de montrer que:

$$A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \iff \rho(A) < 1$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par bloc de la forme suivante:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

Avec N_i sont triangulaires supérieures strictes

23. On suppose que $\rho(A) < 1$.

(a) Montrer que: $A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, (\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

(b) Vérifier que: $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq \alpha_i, (\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)^k = \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} C_k^j \lambda_i^{k-j} N_i^j$.

(c) En déduire que: $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, (\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, puis conclure.

24. Montrer que si $A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ alors $\rho(A) < 1$.

Partie VI: Réduction de Jordan

On appelle réduite de Jordan élémentaire, toute matrice carrée J_p d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ de la forme $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

25. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $\beta_1 = (h^{r-1}(a), \dots, h(a), a)$ où $a \in E$ tel que $h^{r-1}(a) \neq 0$.

(a) Vérifier que $F = \text{Vect}(\beta_1)$ est stable par h et que $\alpha_\beta(h_F) = J_r$.

(b) Soit φ une forme linéaire de E telle que $\varphi(h^{r-1}(a)) \neq 0$. Montrer que $G = \bigcap_{k=0}^{r-1} \text{Ker}(\varphi \circ h^k)$ est un supplémentaire de F dans E , stable par h .

(c) Montrer par récurrence, qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_q})$.

26. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + J_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p I_{\alpha_p} + J_{\alpha_p} \end{pmatrix}$



En cours

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD. APPLICATIONS