

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

Notations et définitions

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $M_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.
- Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\text{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\text{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.
- Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E . On note f un endomorphisme de E .
- On note $f^0 = \text{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\text{Id}_E + a_1f + \dots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.
- De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\text{rg}(f)$, $\text{tr}(f)$, χ_f , π_f et $\text{sp}(f)$.
- Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

Partie I: Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.
 - (a) Montrer que M et ${}^tM$ ont même spectre.
 - (b) Montrer que ${}^tM$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.
2. **Matrices compagnons:** Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q .
 - (b) Soit λ une valeur propre de ${}^tC_Q$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
3. **Endomorphismes cycliques**
 - (a) Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n .
 - (b) Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
 - (c) Montrer que si f est cyclique, alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n .
4. **Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton**
 - (a) Soit x un vecteur non nul de E . Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0x + \alpha_1f(x) + \dots + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

- (b) Justifier que $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f .
 - (c) Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f .

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

(d) Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

Partie II: Étude des endomorphismes cycliques

5. On suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E . On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

Dans la suite de cette partie, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$.

6. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

7. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \text{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k ,

$$\varphi_k : \begin{cases} F_k \rightarrow F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

8. On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

(a) Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?

(b) Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\nu_k = m_k$.

(c) Expliciter la dimension de F_k pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

9. On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \dots + u_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}$.

(a) Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

(b) Justifier que f est cyclique.

Partie III: Endomorphismes commutants

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$.

10. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

11. On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f .

(a) Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

(b) Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

- (c) Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

Partie IV: Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

12. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.
13. On note d le degré de π_f . Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.
Indication: Pour tout x non nul de E , on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.
14. On pose $e_1 = x_1, e_2 = f(x_1), \dots, e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.
Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$.
15. On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1 ,

$$\psi_1 : \begin{cases} E_1 \rightarrow E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Justifier que ψ_1 est cyclique.

16. On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Soit Φ la d -ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d . On note $F = \{x \in E / \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0\}$.
(a) Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.
Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

- (b) Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
- (c) Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
- (d) En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f , tels que :
— $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
— pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.
17. (a) Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n .
(b) On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

Partie V: Endomorphismes orthocycliques pour les 5/2

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E est noté $(x|y)$ et on désigne par $O(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E .

On dit qu'un endomorphisme est *orthocyclique* s'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q (matrice compagnon).

18. Soit $f \in O(E)$.
(a) Soit $f' \in O(E)$ ayant le même polynôme caractéristique que f . Montrer qu'il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E pour lesquelles la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de f' dans $\mathcal{B}'$.
(b) En déduire que f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.
19. Soit f un endomorphisme nilpotent de E .
(a) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.
(b) En déduire que f est orthocyclique si et seulement si

$$f \text{ est de rang } n-1 \text{ et } \forall x, y \in (\text{Ker } f)^\perp, (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

Partie I: Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

1. (a) On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det({}^t(XI_n - M)) = \det(XI_n - {}^tM) = \chi_{{}^tM}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{{}^tM}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp}({}^tM)$$

Ainsi $\text{sp}(M) = \text{sp}({}^tM)$ et donc M et ${}^tM$ ont même spectre

- (b) $\Leftarrow$: On suppose que M est diagonalisable. ce qui nous fournit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$

$$\text{donc } {}^tM = {}^t(P^{-1})^t D {}^tP = ({}^tP)^{-1} D {}^tP$$

d'où ${}^tM$ est diagonalisable

$\Rightarrow$: On suppose que ${}^tM$ est diagonalisable.

Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = {}^t({}^tM)$.

On a bien montré que ${}^tM$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable

2. (a) Voir le cours

$$(b) \text{ On a } {}^t(C_Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ On a } \chi_{{}^tC_Q} = \chi_{C_Q} = Q \text{ ainsi } Q(\lambda) = 0.$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

$${}^t(C_Q)X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1 \lambda - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } {}^t(C_Q)X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ Q(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

$$\text{Comme } \lambda \text{ est racine de } Q, \text{ alors } \dim(E_\lambda({}^tC_Q)) = 1, E_\lambda({}^tC_Q) = \text{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (a) $\Rightarrow$: On suppose que f est cyclique.

Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E

$$\text{Il existe alors } (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$$

On pose alors $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$ de sorte que Q est unitaire de degré n et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$

$\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n

Ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(e_i) = e_{i+1}$, donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

(b) $\Leftarrow$: On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Ainsi $\text{Card}(\text{Sp}(f)) = \deg(\chi_f) = \dim E$, donc f est diagonalisable puisqu'il admet n valeurs propres distinctes

$\Leftarrow$: On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,

ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ d'après 5.

Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour ${}^t C_Q$ d'après 2

Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_{\lambda}({}^t C_Q)$ d'où $n = \sum_{\lambda \in \text{sp}({}^t C_Q)} \dim(E_{\lambda}({}^t C_Q))$

or on a $\forall \lambda \in \text{sp}({}^t C_Q)$, $\dim(E_{\lambda}({}^t C_Q)) = 1$ donc $\text{Card}(\text{sp}({}^t C_Q)) = n$. Or d'après : $\text{sp}({}^t C_Q) = \text{sp}(C_Q) = \text{sp}(f)$, donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

Ainsi f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

(c) On suppose que f est cyclique.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$

Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E , donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$, ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre.

Alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

On note d le degré de π_f . D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$. Or $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geq n$, de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f , d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leq \deg(\chi_f) = n$, ainsi $n = d$ d'où le polynôme minimal de f est de degré n

4. (a) On note $N_x = \left\{ m \in \mathbb{N}^* \mid (f^i(x))_{0 \leq i \leq m-1} \text{ libre} \right\}$.

On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geq n+1$, $m \notin N_x$ car $\dim E = n$. Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par n , donc, par la propriété fondamentale, N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre et la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p}$ est liée

On a bien l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre et $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$

(b) On a $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^p(x))$ car f linéaire

or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) - \dots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

d'où $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) \subset \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

Ainsi $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f

(c) On note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une base de $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

On remarque que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$

d'où $\chi_{\tilde{f}} = Q$ or $\chi_{\tilde{f}} \mid \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f . On a montré que $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f

(d) En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$

Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)[Q(f)(x)] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire

On a ainsi montré que : $\forall x \in E$, $\chi(f)(x) = 0$

or $\chi(f) \in \mathcal{L}(E)$ d'où $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul

Partie II: Etude des endomorphismes cycliques

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

5. $\Rightarrow$: On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après 7

De plus d'après le cours, $\chi_f = X^n$ car f nilpotente

or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition

donc $\pi_f = X^n$

ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f^i \neq 0$

d'où $r = n$

$\Leftarrow$: On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

Ceci nous fournit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.

On suppose, par l'absurde, que la propriété est fausse, on note alors j le minimum de $\{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0\}$.

$$\text{Ainsi } 0 = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x).$$

Or $\forall i \geq j$, $f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$, d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E = n$, donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E , soit f est cyclique.

On a montré que f est cyclique si et seulement si $r = n$

On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.

On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = X^n$

$$\text{ainsi la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

6. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ et f commutent, donc $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$ est stable par f

On a $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux

Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\text{Ker}(\chi(f)) = \text{Ker}((f - \lambda_1 \text{Id}_E)^{m_1}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}((f - \lambda_p \text{Id}_E)^{m_p}) = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\text{Ker}(\chi(f)) = E$, d'où $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

7. Soit $x \in F_k$. On a $(f - \lambda_k \text{Id})(x) = 0$. Pour tout $y \in F_k$, on a $(f - \lambda_k \text{Id})(y) = \varphi_k(y) \in F_k$, ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f - \lambda_k \text{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p , donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in F_k$, on conclut que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k

8. (a) L'indice de nilpotence de φ_k , endomorphisme de F_k est majoré par $\dim F_k$

$$(b) \text{ On note } P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}, \text{ alors pour } k \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ on écrit } P(f) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] \circ (f - \lambda_k \text{Id})^{\nu_k}.$$

Soit $x \in F_k$, on a

$$P(f)(x) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (\varphi_k^{\nu_k}(x)) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (0) = 0$$

L'endomorphisme $P(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, donc $P(f) = 0$. On note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^d)$ est liée, donc $d \geq n$ car

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

$(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre. Or $d = \sum_{i=0}^p \nu_i$ d'où $n \leq \sum_{i=0}^p \nu_i$. Mais $\nu_k \leq m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc

$n \leq \sum_{k=0}^p \nu_k \leq \sum_{i=0}^p m_k = n$, ainsi les inégalités sont des égalités et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\nu_k = m_k$

(c) Comme $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\nu_k \leq \dim F_k$, alors $n = \sum_{k=1}^p \nu_k \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k) = n$, puis $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$

φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$, φ_k est nilpotent et cyclique. Ceci nous fournit une base $\mathcal{B}_k$ de F_k telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k ,

$$\text{on a alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ pour k allant de 1 à p , on obtient une base $\mathbb{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, ainsi $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs de formes voulues

9. (a) Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} \in F_k$
ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^i(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k stable par f
puis pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.

Et ainsi $P(f)(x_0) = \sum_{k=1}^p P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $P(f)(x_0)$ sur $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $Q(f)(x_0) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $Q(f)(e_k) = 0$

On note $e_k = u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathcal{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k

On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $C_{X^{m_k}}$

donc $\pi_{\varphi_k} = X^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(F_k) = m_k$ selon 12

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) = 0$$

puis

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m_k \rrbracket, u_{m_1+\dots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(\varphi_k) = 0 \iff P(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $P(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $(\varphi_k^i(e_k))_{0 \leq i < m_k}$ est une base de F_k .

Par ailleurs on a $Q(\varphi_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q$ (nilpotent et cyclique)

donc $Q(f)(e_k) = 0 \iff Q(\varphi_k + \lambda_k \text{Id}_{F_k})(e_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q(X + \lambda_k)$

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

ainsi $Q(f)(e_k) = 0 \iff (X - \lambda_k)^{m_k} | Q(X)$

donc comme les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,

on a finalement $Q(f)(x_0) = 0 \iff \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q$

(b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$. On note $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ de sorte que $Q(f)(x_0) = 0$,

ainsi $\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q$ d'après la question précédente or $\deg(Q) \leq n-1 < n = \deg\left(\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}\right)$,

donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, donc $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$, d'où $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de E ce qui justifie que f est cyclique

Partie III: Endomorphismes commutants

10. L'application $g \mapsto f \circ g - g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dont le noyau est $C(f)$

Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

De plus, soit g et $h \in C(f)$. On a $(g \circ h) \circ f = g \circ f \circ h = f \circ (g \circ h)$

ainsi $C(f)$ est stable par $\circ$ et il est clair que $\text{Id} \in C(f)$

Ainsi $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$

11. (a) On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

d'où l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$

(b) Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \in C(f^i)$

Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^i(x_0))$$

donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et $g \in \mathbb{K}[f]$

(c) On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leq n-1$)

La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.

On conclut que

$g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$

Partie IV: Décomposition de Frobenius

12. On suppose que $G = F_1 \cup \dots \cup F_r$ est un sous espace de E .

Par l'absurde, On suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

Ainsi $r \geq 2$ et $G \neq \{0\}$.

Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres. Cela nous fournit $x_1 \in F_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geq 2$.

Sinon, $F_1 \neq G$ et on peut aussi trouver $y \in G \setminus F_1$.

Pour tout scalaire λ , on a $y + \lambda x_1 \notin F_1$ (car sinon $y \in F_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in F_2 \cup \dots \cup F_r$.

La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $F_2 \cup \dots \cup F_r$ et contient une infinité d'éléments

car $\mathbb{K}$ est infini et $t \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$

Ceci nous fournit $j \in \llbracket 2, r \rrbracket$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans $\mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x_1 \in F_j$ et $y + \lambda' x_1 \in F_j$

donc $x_1 \in F_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

13. Soit $x \in E$. On considère l'application $\varphi_x : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(f)(x) \in E$.

Comme $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est le noyau de l'application linéaire φ_x ,

I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_f \in I_x$, cet idéal est non réduit à $\{0\}$

ce qui nous fournit $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ unitaire (donc non nul) tel que $I_x = (\pi_{f,x}) = \{\pi_{f,x}P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

On remarque que : $\forall x \in E, \pi_{f,x} \mid \pi_f$

Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^N P_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $N \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est $\prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1)$

Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\}$ est fini de cardinal noté r où $1 \leq r \leq \prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1)$

On peut donc choisir $u_1, \dots, u_r \in E$, tel que $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\} = \{\pi_{f,u_i} \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$

Ainsi $E = \bigcup_{i=1}^r \text{Ker}(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in E, x \in \text{Ker}(\pi_{f,x}(f))$

Ce qui nous fournit $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\text{Ker}(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = E$

On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\text{Ker}(\pi_{f,x_1}(f)) = E$

On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\pi_f \mid \pi_{f,x_1}$

ou $\pi_{f,x_1} \mid \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires

donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x_1) = 0 \iff \pi_f \mid P$$

14. E_1 est stable par f . De plus, on a $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi_f \neq 0$,

le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$

On a alors $P(f)(x_1) = [Q(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in \{T(f)(x_1) \mid T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$

On conclut que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

15. D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1 . De plus on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = C_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(E_1)$, alors ψ_1 est cyclique

16. (a) Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $F_i = \text{Ker}(\Phi \circ f^i)$ ainsi $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est bien un sous-espace de E

De plus, on a pour $i \geq 1, f(F_i) \subset F_{i-1}$ donc

$$f(F) \subset f\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} f(F_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_{i-1} = F$$

d'où F est stable par f

Soit $u \in E_1 \cap F$.

Comme $u \in E_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in F$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En répétant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \dots = \lambda_1 = 0$

donc $u = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $E_1 \cap F = \{0\}$ d'où E_1 et F sont en somme directe

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

- (b) On note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
 Soit $x \in \text{Ker}(\Psi_1)$. On a $x \in E_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \dots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.
 En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$.
 L'autre inclusion étant évidente, on a $\text{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$.
 Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et $\mathbb{K}^d$ or $\dim(E_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$.
 En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective.
 Ainsi Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
- (c) De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers $\mathbb{K}^d$ et que $\text{Ker}(\Psi) \cap E_1 = \{0\}$.
 Ainsi $\dim(E_1) = d = \text{rg}(\Psi)$ et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\Psi)) + \text{rg}(\Psi) = \dim(\text{Ker}(\Psi)) + \dim(E_1)$
 donc $E = E_1 \oplus \text{Ker}(\Psi)$.
- On a $\text{Ker}\Psi = \bigcap_{i=0}^{d-1} F_i$, donc $F \subset \text{Ker}\Psi$.
- Soit $x \in \text{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in F$.
 Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$.
 Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) < d$ et $X^i = Q\pi_f + R$.
 On peut écrire $R = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire
- $$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(R(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(f^k(x)) = 0$$
- ainsi $F \supset \text{Ker}\Psi$ d'où $F = \text{Ker}\Psi$
 on conclut que $E = E_1 \oplus F$.
- (d) Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in F, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$.

Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.

On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.

On pose $P_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $G_1 = F$ de sorte que $E_1 \oplus G_1 = E$

On a $\forall x \in G_1, P_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E , notés $E_1, \dots, E_k$ et G_k tous stables par f , tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \oplus G_k$;
- pour tout $1 \leq i \leq k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k-1$
- $\forall x \in G_k, P_k(f)(x) = 0$

Si $\dim G_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$

Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k

On obtient alors E_{k+1}, G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_{k+1} \oplus G_{k+1}$;
- l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
- si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1} , alors P_{k+1} divise P_k
- $\forall x \in G_{k+1}, P_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k .

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(E_k) \leq 1$ et donc $r \leq \dim(E)$. car $(\dim G_k)_k$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante.

On obtient ainsi le résultat voulu.

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f , tels que :

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
- pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

17. (a) On reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f .

On note Λ l'application telle que pour $(g_1, \dots, g_r) \in \mathcal{L}((E)_1) \times \dots \times \mathcal{L}((E)_r)$, on a $\Lambda(g_1, \dots, g_r)$ défini sur

E par $\Lambda(g_1, \dots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \dots + g_r(x_r)$ où $x = \sum_{k=1}^r x_k$ et les $x_k \in E_k$

Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}((E)_1) \times \dots \times \mathcal{L}((E)_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$

De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) \subset C(f)$

Ainsi $\dim(C(f)) \geq \dim(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) = \dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r))$

or pour $i \in [1, r]$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = \text{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après 23 du III.A

Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 7

donc $\dim(C(\psi_i)) = n_i = \dim(E_i)$ d'où

$$\dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r)) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_r) = \dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim(E) = n$$

Ainsi la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n

- (b) On note $d = \deg(\pi_f)$. D'après le cours, on a $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$

or $\mathbb{K}[f] = C(f)$ et $\dim C(f) \geq n$ donc $d \geq n$.

Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leq n$

donc $d = n$

Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(E_1) = d = n$

Donc $E_1 = E$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique

ainsi f est cyclique

Partie V: IV. Endomorphismes orthocycliques

18. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $R(-\theta)$ (géométriquement en échangeant les deux vecteurs de la base orthonormée ce qui change l'orientation du plan).

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors $R(\theta) = I_2$.

Si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $R(\theta) = -I_2$.

Si $\theta \not\equiv 0 [\pi]$, alors il existe $\theta' \in]0, \pi[$ tel que $R(\theta')$ soit semblable à $R(\theta')$.

D'après le cours sur la réduction des automorphismes orthogonaux, il existe une base orthonormale $\mathbb{B}$, p, q et $r \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \dots, \theta_r \in]0, \pi[$ tels que la matrice de f dans $\mathbb{B}$ soit diagonale par blocs de la forme : $\text{diag}(I_p, -I_q, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r))$.

On remarque que $p + q + 2r = n = \dim(E)$

et $\chi_{R(\theta)} = X^2 - \text{Tr}((R(\theta))) + \det(R(\theta)) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

on a ainsi $\chi_f = \chi_{I_p} \times \chi_{(-I_q)} \times \chi_{R(\theta_1)} \times \dots \times \chi_{R(\theta_r)} = (X - 1)^p (X + 1)^q \prod_{i=1}^r (X - e^{i\theta_i})(X - e^{-i\theta_i})$

Quitte à réordonner les vecteurs de la base, on peut supposer que $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_r < \pi$

ainsi p est la multiplicité de 1, q est la multiplicité de -1 dans χ_f et les $\theta_1, \dots, \theta_r$ sont donnés dans l'ordre par les racines non réelles de χ_f

Ainsi comme $\chi_f = \chi_{f'}$, on pourra trouver $\mathbb{B}'$ base orthonormée telle que $\text{Mat}_{\mathbb{B}'}(f')$ ait la même forme diagonale par blocs.

ainsi il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f')$

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

(b) $\Rightarrow$: On suppose que f est orthocyclique.

Ceci nous fournit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{B}$ une base orthonormée de E tels que

$$\text{Mat}_{\mathbb{B}}(f) = C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (C_1 | \dots | C_n)$$

où $C_1, \dots, C_n$ désigne les colonnes de la matrice.

Comme $f \in O(E)$, $\mathbb{B}$ est orthonormée, alors $\text{Mat}_{\mathbb{B}}(f) \in O(n)$

d'où $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$

donc pour $1 \leq i \leq n-1$, on a $C_i \perp C_n$ et donc $0 = \langle C_i, C_n \rangle = -a_i$ et $1 = \langle C_n, C_n \rangle = a_0^2$

$$\text{ainsi } a_0 \in \{-1, 1\} \text{ et } \text{Mat}_{\mathbb{B}}(f) = C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi d'après 3, on a $\chi_f \in \{X^n - 1, X^n + 1\}$

$\Leftarrow$: On suppose que $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

Premier cas : $\chi_f = X^n - 1$ et n pair On a donc $\chi_f = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (X - z)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

On pose $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2m = n$ et $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a donc } \chi_f = \prod_{k=-m+1}^m (X - e^{2ik\pi/n}) = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(X^2 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1 \right)$$

D'après la question précédente, on peut trouver une base orthonormée : $\mathbb{B} = (e_0, e_1, e'_1, \dots, e_{m-1}, e'_{m-1}, e_m)$ telle que $\text{Mat}_{\mathbb{B}}f = \text{diag}(1, R(\theta_1), \dots, R(\theta_{m-1}), -1)$.

Dans la question 34, la base aurait été $(e_0, e_m, e_1, e'_1, \dots, e_{m-1}, e'_{m-1})$

On note $\mathcal{P}_0 = E_1(f) = \text{Vect}(e_0)$; $\mathcal{P}_m = E_{-1}(f) = \text{Vect}(e_m)$ et $\mathcal{P}_k = \text{Vect}(e_k, e'_k)$.

Ces sous espaces sont tous stables par f et $E = \bigoplus_{0 \leq k \leq m}^{\perp} \mathcal{P}_k \quad (\star)$

Ainsi pour $u_j \in \mathcal{P}_j$ et $u_\ell \in \mathcal{P}_\ell$, on a $(u_j | f^i(u_\ell)) = 0$ où $j \neq \ell$ dans $\llbracket 0, m \rrbracket$ et $i \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

f induit sur le plan $\mathcal{P}_k$ orienté par sa base orthonormée $\mathbb{B}_k = (e_k, e'_k)$ une rotation d'angle θ_k .

Ainsi pour $j \in \mathbb{N}$, f^j induit sur $\mathcal{P}_k$ orienté par $\mathbb{B}_k$, une rotation d'angle $j\theta_k$.

donc $(f^j(e_k) | e_k) = \cos(j\theta_k) = \cos(j\theta_{-k})$ car e_k est un vecteur unitaire du plan et $\cos$ est paire

Pour $k = 0$, on a $(f^j(e_0) | e_0) = (1^j e_0 | e_0) = \|e_0\|^2 = 1 = \cos(j\theta_0)$

Pour $k = m$, on a $(f^j(e_m) | e_m) = ((-1)^j e_m | e_m) = (-1)^j \|e_m\|^2 = \cos(j\pi) = \cos(j\theta_m)$

Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $(f^j(e_k) | e_k) = \cos(j\theta_k) \quad (\star\star)$

$$\text{On pose } x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e_0 + e_m + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{m-1} e_k \right) \text{ de sorte que } \|x_0\| = \sqrt{\frac{1^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{2}^2 + (-1)^2}{n}} = 1.$$

Comme $f \in O(E)$, on a $\forall j \in \mathbb{N}$, $\|f^j(x_0)\| = 1$

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, on a :

$$(x_0 | f^j(x_0)) = \frac{1}{n} \left((e_0 | f^j(e_0)) + (e_m | f^j(e_m)) + \sum_{k=1}^{m-1} 2(e_k | f^j(e_k)) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=-m+1}^m \cos(j\theta_k)$$

$$\text{Or } \sum_{k=-m+1}^m \cos(j\theta_k) = \sum_{k=-m+1}^m \operatorname{Re} \left(\exp \left(\frac{jk i 2\pi}{n} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{j i 2\pi/n} \right)^k \right)$$

Comme $0 < 1 \leq j \leq n-1 < n$, alors $e^{j i 2\pi/n} \neq 1$ et on reconnaît une somme géométrique.

$$\text{D'où : } \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{j i 2\pi/n} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{j i 2\pi/n} \right)^n}{1 - e^{j i 2\pi/n}} = 0$$

$$\text{ainsi } (x_0 | f^j(x_0)) = 0$$

Pour $0 \leq j < \ell \leq n-1$, on a alors $1 \leq \ell - j \leq n-1$

et donc comme $f \in O(E)$, on a $(f^j(x_0) | f^\ell(x_0)) = (x_0 | f^{\ell-j}(x_0)) = 0$

ainsi $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base orthonormée de E ce qui permet de conclure.

Deuxième cas : $\chi_f = X^n - 1$ et n impair

Alors les calculs sont analogues au cas précédent ce qui change est que -1 n'est pas valeur propre de f mais on a encore $\operatorname{Re} \left(\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^j \right) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

Troisième cas : $\chi_f = X^n + 1$: On remarque que $\forall z \in \mathbb{C}, z^n + 1 = 0 \iff (z^n - 1 \neq 0 \text{ et } z^{2n} - 1 = 0)$

$$\text{Ainsi pour } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \text{ on a } \sum_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ z^n + 1 = 0}} z^k = \sum_{z \in \mathbb{U}_{2n}} z^k - \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^k = 0 - 0 = 0$$

Ce qui permet de conclure de manière analogue aux cas précédents.

On en déduit que : f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$

19. (a) Comme f est nilpotent, le cours nous fournit une base $\mathbb{B}_s = (e_1^s, \dots, e_n^s)$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_s}(f)$ soit triangulaire supérieure.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathbb{B}_s$ pour obtenir une base orthonormale $\mathbb{B}_o = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ et en notant la matrice de passage P de $\mathbb{B}_s$ à $\mathbb{B}_o$ est triangulaire supérieure ainsi que P^{-1} .

Comme le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est stable par produit ;

alors la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_o}(f) = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathbb{B}_s}(f) P$ est triangulaire supérieure.

Alors en notant $\mathcal{B}_i = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$, on a $\mathcal{B}_i$ base orthonormale de E et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f)$ triangulaire inférieure

ainsi il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure

- (b) $\iff$: On suppose que f est de rang $n-1$ et que $\forall x, y \in (\operatorname{Ker} f)^\perp, (f(x) | f(y)) = (x | y)$.

La question précédente nous fournit une base orthonormée $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tel que $A = \operatorname{Mat}_{\mathbb{B}} f$ soit triangulaire inférieure.

On note $A = (C_1 | \dots | C_n)$ en colonnes.

Comme f est nilpotente, alors $\chi_f = X^n$ d'après le cours

donc la matrice est triangulaire strictement inférieure (diagonale nulle)

ainsi $e_n \in \operatorname{Ker} f \setminus \{0\}$ et comme $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - \operatorname{rg}(f) = 1$,

on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_n)$ et $\operatorname{Ker}(f)^\perp = \{e_n\}^\perp = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ car $\mathbb{B}$ est orthonormée

Ainsi pour tout $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, par calcul dans une base orthonormée on a :

$$\langle C_i, C_j \rangle = (f(e_i) | f(e_j)) = (e_i | e_j) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

donc si $1 \leq i < j \leq n-1$, on a $\langle C_i, C_j \rangle = 0$ et $\langle C_i, C_i \rangle = \langle C_j, C_j \rangle = 1$

DÉCOMPOSITION DE FROBENIUS

On a donc $C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $a_{n-1} \in \{-1, 1\}$ car $a_{n-1}^2 = \langle C_{n-1}, C_{n-1} \rangle = 1$

On trouve ensuite $C_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a_{n-1} \in \{-1, 1\}$ car $\langle C_{n-2}, C_{n-1} \rangle = 0$ et $\langle C_{n-2}, C_{n-2} \rangle = 1$

En procédant de même, on obtient $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ où les $a_i \in \{-1, 1\}$

La base $\mathbb{B}' = (e_1, a_1 e_2, a_1 a_2 e_3, \dots, \prod_{i=0}^{n-2} a_i e_{n-1}, \prod_{i=0}^{n-1} a_i e_n)$ est orthonormée et $\text{Mat}_{\mathbb{B}'}(f) = C_{X^n}$.

Ainsi f est orthocyclique.

$\Rightarrow$: On suppose que f est orthocyclique.

Comme f est cyclique et nilpotent, on a $\pi_f = \chi_f = X^n$ d'après 12

Comme f est orthocyclique,

cela nous fournit une base orthonormée $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathbb{B}} f = C_Q$.

Comme $X^n = \chi_f = \chi_{C_Q} = Q$, on a $\text{Mat}_{\mathbb{B}} f = C_{X^n}$.

donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(C_{X^n}) = n - 1$, $\text{Vect}(e_n) = \text{Ker } f$ et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = (\text{Ker } f)^\perp$

et on vérifie facilement que $\forall x, y \in (\text{Ker } f)^\perp$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ par calcul dans la base orthonormée $\mathbb{B}$