

DÉTERMINANTS CLASSIQUES

Partie I: Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale de x de degré inférieur à $n - 1$.
Vous pouvez développer par rapport à la dernière colonne
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.
5. Justifier que la matrice $(\alpha_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible si, et seulement, si les α_i sont deux à deux distincts

Partie II: Matrice circulante

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \dots & \omega_{n-1}^{n-2} \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose $P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$

6. Justifier que M est inversible
7. Justifier l'égalité $A.M = M.\text{diag}(P(1), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1}))$ Montrer que les deux matrices de l'égalité ont les mêmes colonnes
8. En déduire $\det(A)$
9. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

DÉTERMINANTS CLASSIQUES

Partie III: Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT

Soit A_n la matrice définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{pmatrix}$$

Où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ réels tels que toutes les sommes $a_i + b_j$ soient non nulles.

10. Que vaut $\det(A_n)$ si deux des b_j sont égaux ou deux des a_j sont égaux.

11. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts et a_i sont deux à deux distincts. Soit R_n la fraction rationnelle définie par

$$R_n(X) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)}{\prod_{i=1}^n (X + b_i)}$$

(a) Justifier que R_n s'écrit d'une façon unique de la forme $R_n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X + b_i}$.

Où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres complexes

(b) Déterminer λ_n et vérifier qu'il est non nul

(c) Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A_n , montrer que

$$\det(A_n) = \frac{1}{\lambda_n} \det \left(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \right) = \frac{1}{\lambda_n} R_n(a_n) \det(A_{n-1})$$

(d) En déduire que

$$\det(A_n) = \frac{V(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

12. Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Hilbert d'ordre n .

En utilisant ce qui précède, montrer que

$$\det(H_n) = \frac{\left(\prod_{k=1}^n k! \right)^4}{n!^2 \times \prod_{k=1}^{2n} k!}$$

DÉTERMINANTS CLASSIQUES

Partie I: Déterminant de Vandermonde

1. Un calcul immédiat montrer que $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$. On a ensuite :

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 \\ (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1) & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 + \alpha_1) & \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2 + \alpha_1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

2. On pose $P(x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$. Alors si on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, et de coefficient devant x^{n-1} égal à $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.
3. On remarque que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P (puisque dans ce cas le déterminant comporte deux colonnes identiques). On en déduit donc, d'après la question précédente, que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i).$$

4. On évalue la formule précédente en $x = \alpha_n$. En s'aidant des deux premières questions, on démontre par récurrence que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

5. La matrice $(\alpha_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ a pour déterminant $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$. Donc elle est inversible si, et seulement, si est inversible si, et seulement, si $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$, soit les α_i sont deux à deux distincts

Partie II: Matrice circulante

6. On a $M = (\omega_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ et les $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont deux à deux distincts, donc M est inversible
7. Les deux matrices AM et $M \text{diag}(P(1), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1}))$ sont carrées d'ordre n . La $k^{\text{ième}}$ colonne de

$$M \text{diag}(P(1), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})) \text{ vaut } k^{\text{ième}} \text{ colonne de } M \text{ multipliée par } P(\omega_{k-1}), \text{ soit } P(\omega_{k-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_{k-1} \\ \vdots \\ \omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part la $k^{\text{ième}}$ colonne de AM vaut $AC_k(M)$ et en tenant compte que $\omega_{k-1}^n = 1$, alors on obtient

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_{k-1} \\ \vdots \\ \omega_{k-1}^{n-2} \\ \omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i \omega_{k-1}^{i-1} \\ \sum_{i=1}^n a_i \omega_{k-1}^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i \omega_{k-1}^{i+n-2} \end{pmatrix} = P(\omega_{k-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_{k-1} \\ \vdots \\ \omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc les deux matrices ont les mêmes colonnes, d'où l'égalité

DÉTERMINANTS CLASSIQUES

8. On a d'une part

$$\det(AM) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}) \det(M)$$

et d'autre part

$$\det(AM) = \det(A) \det(M).$$

Puisque le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde), on a :

$$\det(A) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}).$$

$$9. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) \text{ où } j = e^{2i\pi/3}.$$

Un calcul bien plus simple sera fourni dans la planche

Partie III: Déterminant de Cauchy

10. Si deux des b_j ou des a_i sont égaux, $\det(A_n)$ est nul car deux de ses colonnes ou de ses lignes sont égales.

11. (a) R_n est une fraction rationnelle irréductible de degré strictement négatif et dont les pôles sont simples, donc, d'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe un unique n -upplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\text{tel que } R_n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X + b_i}.$$

$$(b) \text{ On a } \lambda_n = \lim_{z \rightarrow -b_n} (z + b_n) R_n(z) = \frac{(-b_n - a_1) \dots (-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1) \dots (-b_n + b_{n-1})} = \frac{\prod_{i=1}^n (a_i + b_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}.$$

(c) Notons B_n la matrice de colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j$. On a

$$\begin{aligned} \det(B_n) &= \det \left(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \det(C_1, \dots, C_{n-1}, C_j) \quad \det \text{ est } n\text{-linéaire} \\ &= \lambda_n \det(C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) \quad \det \text{ est alternée} \\ &= \lambda_n \det(A_n) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \det(A_n) = \frac{1}{\lambda_n} \det \left(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \right).$$

D'autre part la dernière colonne de B_n est de la forme $\begin{pmatrix} R_n(a_1) \\ R_n(a_2) \\ \vdots \\ R_n(a_n) \end{pmatrix}$ et puisque $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$,

on obtient en développant suivant la dernière colonne $\det(A_n) = \frac{1}{\lambda_n} R_n(a_n) \det(A_{n-1})$

$$(d) \text{ Montrons par récurrence sur } n \in \mathbb{N}^* \text{ que } \det(A_n) = \frac{V(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

$$\text{— Pour } n = 1, \text{ on a } V(a_1) = V(b_1) = 1 \text{ et } \det(A_1) = \frac{1}{a_1 + b_1}$$

$$\text{— Soit } n \geq 2. \text{ D'après la formule précédente, on a } \det(A_n) = \frac{1}{\lambda_n} R_n(a_n) \det(A_{n-1}), \text{ avec}$$

$$\lambda_n = \frac{\prod_{i=1}^n (a_i + b_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}, \quad R_n(a_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)} \text{ et } \det(A_{n-1}) \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{V(a_1, \dots, a_{n-1}) V(b_1, \dots, b_{n-1})}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

DÉTERMINANTS CLASSIQUES

On remplace les paramètres par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned}
 \det(A_n) &= \frac{1}{\lambda_n} R_n(a_n) \det(A_{n-1}) \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{i=1}^n (a_i + b_n) \prod_{i=1}^n (a_n + b_i)} \frac{V(a_1, \dots, a_{n-1}) V(b_1, \dots, b_{n-1})}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\
 &= \frac{\overbrace{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}^{=V(a_1, \dots, a_n)} \overbrace{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}^{=V(b_1, \dots, b_n)}}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j) \prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)} \\
 &= \frac{V(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}
 \end{aligned}$$

12. Dans le cas particulier où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = b_i = i$, le déterminant à calculer : $\det(H_n) = \frac{V(1, 2, \dots, n)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)}$. Mais,

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (i + j) \right) = \prod_{i=1}^n \frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k!}{\left(\prod_{k=1}^n k! \right)^2},$$

et d'autre part,

$$V(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^n (j - i) \right) = \prod_{i=1}^{n-1} (n - i)! = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n k!.$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, \quad \det(H_n) = \frac{\left(\prod_{k=1}^n k! \right)^4}{n!^2 \times \prod_{k=1}^{2n} k!}$$