

ENDOMORPHISME CYCLIQUE

NOTATIONS

- Pour p et q entiers de $\mathbb{N}$, avec $p \leq q$, $\llbracket p, q \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris au sens large entre p et q .
- E désigne un espace vectoriel de dimension finie n , $n \geq 2$, sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- I désigne l'identité et 0 désigne l'application nulle.
- Dans tout le problème f désigne un endomorphisme de E ; on pose $f^0 = I$ et par $f^{k+1} = f^k \circ f$;
- Si $R \in \mathbb{K}[X]$, $R(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$, on note $R(f)$ l'endomorphisme $a_0I + a_1f + \dots + a_pf^p$.
- On note alors $\mathbb{K}[f]$ l'algèbre des polynômes de f , c'est-à-dire $\mathbb{K}[f] = \{R(f) \mid R \in \mathbb{K}[X]\}$.
- On note $\chi_f(X) = \det(XI - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$.
- Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, on pourra également introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{K})$.
- On dit que f est cyclique si, et seulement si, il existe x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
- On appelle commutant de f l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.
On admettra que $\mathcal{C}(f)$ est une algèbre de dimension au moins n sur $\mathbb{K}$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Partie I: Matrice compagne d'un endomorphisme cyclique.

1. Montrer que f est cyclique si et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a pour matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n.$$

On dira que C est la matrice compagne de f .

2. (a) Soit $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Déterminer en fonction de Q le polynôme P_C caractéristique de C . On dira aussi que C est la matrice compagne de P_C .
- (b) Si f est un endomorphisme cyclique, a-t-on unicité de la matrice compagne de f ?
3. Soit λ une valeur propre de C
- (a) déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- (b) Déterminer une base de ce sous-espace propre.

Partie II: Endomorphismes nilpotents

4. On suppose dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
- (a) Montrer que f est cyclique et déterminer sa matrice compagne.
- (b) Quelle est la dimension du noyau de f ?
5. On suppose maintenant f nilpotent; c'est-à-dire qu'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

On pose pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $N_k = \text{Ker } f^k$ et $n_k = \dim N_k$. On suppose également que $n_1 = 1$.

- (a) Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $f(N_{k+1}) \subset N_k$.
- (b) En considérant l'application $\varphi : \begin{cases} N_{k+1} \rightarrow N_k \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$, montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $n_{k+1} \leq n_k + 1$.
- (c) Montrer par récurrence que : $n_k = n_{k+1} \Rightarrow \forall j \geq k, N_j = N_k$.
En déduire que $p = n$ et déterminer n_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie III: Une caractérisation des endomorphismes cycliques

ENDOMORPHISME CYCLIQUE

6. Montrer que si f est cyclique, $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose, dans cette partie, que $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

7. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On factorise le polynôme caractéristique χ_f de f sous la forme :

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres distinctes de f , et les m_k dans $\mathbb{N}^*$ leur ordre respectif de multiplicité.

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $E_k = \text{Ker}((f - \lambda_k I)^{m_k})$.

(a) Montrer que les sous-espaces vectoriels E_k sont stables par f et que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

(b) Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note φ_k l'endomorphisme $\varphi_k : \begin{cases} E_k \rightarrow E_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$

i. Déterminer $\varphi_k^{m_k}$.

ii. Quelle est la dimension de E_k ?

iii. Montrer que $\varphi_k^{m_k-1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a une matrice (diagonale par blocs), ces blocs

appartenant à $M_{m_k}(\mathbb{C})$, et étant de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

(d) En utilisant la matrice compagne de χ_f montrer que f est cyclique.

8. On suppose, dans cette question uniquement, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$: $A = QBQ^{-1}$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{C})$.

On écrit $Q = Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $M_n(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid Q_1 + \lambda Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est non vide.

ii. En déduire que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que f est cyclique et conclure.

Partie IV: Une autre caractérisation des endomorphismes cycliques

9. On suppose f cyclique et on choisit x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

(a) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. En écrivant $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$, montrer que $g \in \mathbb{K}[f]$.

(b) Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si, et seulement si, il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

10. On suppose que $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique. Conclure.

Partie V: Cycles

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit que f est un (p) -cycle si, et seulement si, il existe $x_0 \in bE$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit génératrice de E et $f^p(x_0) = x_0$.

11. Dans cette partie, f désigne un p -cycle.

(a) Montrer que $f^p = I$.

(b) Soit $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est libre}\}$.

Montrer que $\mathcal{E}$ admet un maximum noté m .

ENDOMORPHISME CYCLIQUE

(c) Montrer que : $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \mathbf{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

En déduire que f est cyclique.

Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes de f .

12. Dans cette question, f désigne un n -cycle.

(a) Déterminer C , matrice compagne de f .

(b) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer CU_k .

13. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$, avec $m_{k,\ell} = \bar{\omega}^{k\ell}$.

Calculer $M\bar{M}$; en déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1} .

14. **Matrice circulante:** Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \dots & & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A .



En cours

ENDOMORPHISME CYCLIQUE