

MATRICE STOCKASTIQUE

Notations : — On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

- Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A . On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A .
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A , $\text{Tr}(A)$ la trace de A ; on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_{\lambda}(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$.
- Soit I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note $[[1, n]]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.
- Pour tout nombre complexe z , on note $|z|$ le module de z .
- On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique lorsque

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, a_{i,j} > 0 \quad (1)$$

$$\forall i \in [[1, n]], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad (2)$$

*** **

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A .
2. **Précision sur $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.**

- (a) Soient une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [[1, n]]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|, i \in [[1, n]]\}$. Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{k,j}|$$

- (b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant 2a à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en 2a. En déduire $|\lambda| \leq 1$.
- (c) On suppose que $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$ de 2b que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ .

3. Dimension de $E_1(A)$.

- (a) Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.
- (b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $|v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j|$. En calculant $\sum_{i=1}^n |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $|v_i| > 0$.

MATRICE STOCKASTIQUE

- (c) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \frac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$. Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour tout $i \in [1, n]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [1, n]$, on a $\sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$.

- (d) **Bilan des propriétés spectrales de A et de ${}^tA$.**

Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes

4. A l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en 3c, on considère l'application N définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, N(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leq N(X)$. Retrouver le résultat de 2b : pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leq 1$.

5. **Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A .**

A l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

On note $\text{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ .

- (a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.
- (b) Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \text{Ker}(\Phi)$.
- (c) Soit $X \in E_{\lambda}(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \text{Ker}(\Phi)$.
- (d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A .

MATRICE STOCKASTIQUE

1. La i -ième coordonnée de AU est $\sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (U étant non nul).

2. (a) Comme $BX = 0$, sa k -ième coordonnée est nulle $\sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j = 0$ ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de k)

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{k,j}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{k,j}|$$

Comme $|x_k| > 0$ (X n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

- (b) $B = A - \lambda I_n$ est bien non inversible (puisque λ est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de B étant ceux de A)

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{k,j}|$$

Avec la propriété ($ST > 0$) on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|\lambda| - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$ et donc que

$$|\lambda| \leq 1$$

- (c) Si $|\lambda| = 1$, on a égalité ci-dessus et on doit donc avoir égalité dans l'inégalité triangulaire c'est à dire avoir $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} = |\lambda - a_{k,k}| = |e^{i\theta} - a_{k,k}|$. En élevant cette identité au carré, on obtient après simplification $-2a_{k,k} = -2\cos(\theta)a_{k,k}$. Comme $a_{k,k} \neq 0$, on a $\cos(\theta) = 1$ et donc

$$\lambda = 1$$

3. (a) Le déterminant est invariant par transposition et donc A et A^T ont mêmes valeurs propres (puisque même polynôme caractéristique). En particulier, $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$.

Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de $A - I_n$ et de $A^T - I_n$ ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim(E_1(A)) = n - \text{rg}(A - I_n) = n - \text{rg}(A^T - I_n) = \dim(E_1(A^T))$$

- (b) La i -ième coordonnée de $A^T V$ est $\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j$. Elle vaut aussi v_i (car $A^T V = V$). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^n \left(|v_j| \sum_{i=1}^n a_{j,i} \right)$$

MATRICE STOCKASTIQUE

Avec la propriété (2), cette inégalité est une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi (par exemple par l'absurde) des égalités. On a donc

$$\forall i, |v_i| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$$

Ceci signifie exactement que $A^T|V| = |V|$ (pour tout i , les deux vecteurs ont même i -ième coordonnée).

Si, par l'absurde, il existait un i tel que $|v_i| = 0$ alors on aurait $0 = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$ ce qui donnerait la nullité

pour tout j de $a_{i,j} |v_j|$ (une somme de quantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les v_j (propriété (1)). Ceci contredit $V \neq 0$. Ainsi

$$\forall i, |v_i| > 0$$

- (c) Y étant un élément non nul de $E_1(A^T)$, on a $\forall i, y_i \neq 0$. On peut en particulier poser $Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y$. C'est un élément de $E_1(A^T)$ dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul. X est donc multiple de Y et

$$\dim(E_1(A^T)) = 1$$

Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^T)$ et $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |v_i|} |V|$. Ω est un élément de $E_1(A^T)$ (question 3c) dont les coordonnées sont > 0 à somme égale à 1.

Ω est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de $E_1(A^T)$ est multiple de Ω (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).

Enfin, $A^T \Omega = \Omega$ s'écrit

$$\forall i, \sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$$

- (d) Les valeurs propres de A sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A)$ est de dimension 1 et une base en est $(1, \dots, 1)$.

Les valeurs propres de A^T sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A^T)$ est de dimension 1 et les coordonnées d'un vecteur propres sont toutes > 0 ou toutes < 0 .

4. N est positive, vérifie l'axiome de séparation ($N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ car les ω_i sont > 0), est homogène ($N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$) et vérifie l'inégalité triangulaire ($N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$) est conséquence de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$). N est donc une norme.

Posons $Y = AX$; on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ et donc (avec la dernière égalité de 3c)

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i \right) |x_j| = \sum_{j=1}^n \omega_j |x_j| = N(X)$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, on a donc $|\lambda| N(X) = N(\lambda X) = N(AX) \leq N(X)$ et donc (puisque $N(X) > 0$, X étant non nul) $|\lambda| \leq 1$. On retrouve

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{z / |z| \leq 1\}$$

5. (a) Le même calcul que ci-dessus (mais sans les modules et donc avec des égalités) donne immédiatement $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

- (b) Si $X \in \text{Ker}(\Phi) \cap E_1(A)$ alors $X \in \text{Vect}(U)$ et $\Phi(X) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$ et $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda \sum \omega_i = \lambda$. Donc $X = 0$. $E_1(A)$ et $\text{Ker}(\Phi)$ sont ainsi en somme directe.

Par ailleurs, $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = n - 1$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \text{Ker}(\Phi)$$

MATRICE STOCKASTIQUE

- (c) On suppose $AX = \lambda X$ et $\lambda \neq 1$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$. $\lambda \neq 1$ indique que $\Phi(X) = 0$ c'est à dire que $X \in \text{Ker}(\Phi)$.
- (d) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A . montre que $\text{Ker}(\Phi)$ est stable par f (si $\Phi(X) = 0$ alors $\Phi(AX) = 0$). $E_1(A)$ est aussi stable par f . Dans une base adaptée à la décomposition de 5b, la matrice de f est bloc-diagonale du type $\text{diag}(1, B)$. Si 1 était valeur propre de B alors $E_1(A)$ serait de dimension ≥ 2 (on aurait deux vecteurs propres de f indépendants, l'un étant dans $E_1(A)$ et l'autre dans $\text{Ker}(\Phi)$) ce qui est exclus. 1 n'est donc pas racine de χ_B . Or $\chi_f = (1 - X)\chi_B$ (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de χ_f . Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1.