

NOYAUX ET IMAGES ITÉRÉS

Dans tout le problème, E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$. Si f est un endomorphisme de E , on définit la suite $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E par $f^0 = id_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.

Partie I: Noyaux et images itérés

On se propose, dans cette partie, de montrer, pour tout endomorphisme f de E , l'existence d'un entier p vérifiant:

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p \end{cases} \quad (1)$$

- Donner, en justifiant votre réponse, une valeur de p vérifiant (1) lorsque f est un automorphisme de E .
On étudie maintenant et jusqu'à la fin du problème, le cas où f est un endomorphisme non bijectif quelconque de E .
- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1} \text{ et } \text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k)$.
- Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, l'égalité $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$ équivaut à l'égalité $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$, et qu'elle entraîne $\text{Im } f^j = \text{Im } f^k$ pour tout $j \geq k$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, établir une relation entre les dimensions des sous espaces $\text{Im } f^k$, $\text{Im } f^{k+1}$ et $\text{Im } f^k \cap \text{Ker } f$.
- On note $a_k = \dim(\text{Ker } f^k)$. Montrer que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'il existe un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$.
- En déduire l'existence d'un entier naturel non nul p qui vérifie les deux conditions:
 - $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\text{Ker } f^k \neq \text{Ker } f^{k+1}$
 - $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$.
- Montrer que $\forall k \geq p$, $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$.
- Montrer que $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$.
- Vérifier que l'entier p déterminé à la question (6) est le plus petit entier naturel vérifiant (1).

Partie II: Application à l'étude d'endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, p désigne l'entier déterminé en (6)

- On suppose que $p = n$.
 - Quelle est la dimension de $\text{Ker } f^k$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$? en déduire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
 - Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$ et soit $L = \{g \in \mathcal{L}(E) / gof = fof\}$.
Montrer que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
 - Soit $g \in L$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a)$.
 - Montrer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.
 - Déterminer la dimension de L .
- On suppose que p est compris strictement entre 1 et n , et que $E = \text{Ker } f^p$. soit e un élément de E tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.
 - Établir que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre. On notera G le sous espace de E qu'elle engendre
 - Soit φ un élément de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que $\varphi(f^{p-1}(e)) \neq 0$.
Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel H de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq n}$?
 - Soit $F = \bigcap_{\Psi \in H} \text{Ker } \Psi$. Montrer que F est stable par f et que $E = F \oplus G$.

NOYAUX ET IMAGES ITÉRÉS

Partie I: Noyaux et images itérés

1. Lorsque f est un automorphisme, alors $\text{Ker } f = \{0\}$ et $\text{Im } f = E$, alors on peut prendre $p = 1$.
2. Soient k un entier naturel et x un élément de E .

$$x \in \text{Ker } f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } f^{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E / x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E / x = f^k(z) \Rightarrow x \in \text{Im } f^k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset \text{Im } f^k$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vu les inclusions précédentes, on a

$$\begin{aligned} \text{Ker } f^k &= \text{Ker } f^{k+1} \iff \dim \text{ker } f^k = \dim \text{ker } f^{k+1} \\ &\iff \text{rg } f^k = \text{rg } f^{k+1} \\ &\iff \text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1} \end{aligned}$$

Par récurrence sur $j \geq k$, on montre que $\text{Im } f^j = \text{Im } f^k$

- Pour $j = k$, rien à démontrer et pour $j = k + 1$ l'égalité est vérifiée
 - Soit $j \geq k + 1$ et supposons que $\text{Im } f^j = \text{Im } f^k$ et montrons que $\text{Im } f^{j+1} = \text{Im } f^k$. L'inclusion $\text{Im } f^{j+1} \subset \text{Im } f^k$ est triviale car la suite $(\text{Im } f^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Inversement soit $x \in \text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$, alors il existe $z_0 \in E$ tel que $x = f^{k+1}(z_0) = f(f^k(z_0))$. Par hypothèse de récurrence $f^k(z_0) \in \text{Im } f = \text{Im } f^j$, d'où il existe $x_0 \in E$ tel que $f^k(z_0) = f^j(x_0)$, puis $x = f^{j+1}(x_0) \in \text{Im } f^{j+1}$
4. Soit g la restriction de f sur $\text{Im } f^k$. On a bien $\text{Im } g = g(\text{Im } f^k) = \text{Im } f^{k+1}$ et $\text{Ker } g = \text{Ker } f \cap \text{Im } f^k$. On applique le théorème du rang à g , alors

$$\dim \text{Im } f^k = \dim (\text{Ker } f \cap \text{Im } f^k) + \dim \text{Im } f^{k+1}$$

5. La suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est d'entier naturel croissante et majorée par n , donc elle ne peut pas être strictement croissante et, par suite, il existe un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$.
6. $\{k \in \mathbb{N}, a_k = a_{k+1}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ car f n'est pas injectif et non vide vide d'après la question précédente, donc il admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. Alors
 - (i) $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \text{Ker } f^k \neq \text{Ker } f^{k+1}$
 - (ii) $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$.
7. Puisque $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$, d'après la question (3), $\forall k \geq p, \text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$.
8. Il suffit de démontrer que $\text{Ker } f^p \cap \text{Im } f^p = \{0\}$.
Soit $x \in \text{Ker } f^p \cap \text{Im } f^p$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$ et $f^p(y) = 0$, soit $f^{2p}(y) = 0$, ou encore $y \in \text{Ker } f^{2p} = \text{Ker } f^p$, d'où $x = f^p(y) = 0$
9. — p est un entier naturel vérifiant (1).
 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que (1) est vérifiée et montrons que $k \geq p$. Pour se faire on montre que $\text{Ker } f^{k+1} = \text{Ker } f^k$. Soit $x \in \text{Ker } f^{k+1}$, alors $f^{k+1}(x) = 0$, puis $f^{(2k)}(x) = 0$, soit $f^k(x) \in \text{Im } f^k \cap \text{Ker } f^k = \{0\}$, donc $x \in \text{Ker } f^k$. Ainsi l'égalité souhaitée puis par définition de p , $k \geq p$

Partie II: Application à l'étude d'endomorphismes nilpotents

10. On suppose que $p = n$.
 - (a) La suite $(\dim \text{Ker } f^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement croissante d'éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc $\dim \text{Ker } f^k = k$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ puis on en déduit que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

NOYAUX ET IMAGES ITÉRÉS

(b) Montrons que la famille $(f^k(a))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0 \Rightarrow f^{n-1-i} \left(\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k f^k(a) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k f^{n-1-i+k}(a) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i f^{n-1}(a) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, n-1-i+k \geq p \text{ et donc } f^{n-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } f^{n-1}(a) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i .

Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(f^k(a))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre. Une telle famille est de cardinal $n = \dim E$, donc c'est une base de E .

(c) $g(a) \in E$, donc il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a)$.

(d) Les deux applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(f^k(a))_{0 \leq k \leq n-1}$.

(e) $L = \mathbf{Vect}(f^k, 0 \leq k \leq n-1)$ et $\dim L = n$.

11. On suppose que p est compris strictement entre 1 et n , et que $E = \text{Ker } f^p$. soit e un élément de E tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.

(a) Même méthode que la question (10b). On notera G le sous espace de E qu'elle engendre.

(b) Comme $f^p = 0$, alors $H = \mathbf{Vect}(\varphi, \varphi \circ f, \dots, \varphi \circ f^{p-1})$.
Montrons que la famille $(\varphi, \varphi \circ f, \dots, \varphi \circ f^{p-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \varphi \circ f^k = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \min\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \varphi \circ f^k = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k \varphi \circ f^k = 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k \varphi \circ f^k \right) (f^{p-1-i}(e)) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k f^{p-1-i+k}(e) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i f^{p-1}(e) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, p-1-i+k \geq p \text{ et donc } f^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } f^{p-1}(e) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i .

Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(\varphi, \varphi \circ f, \dots, \varphi \circ f^{p-1})$ est libre. Ainsi cette famille est une base de H et, par suite, H est de dimension p .

(c) Pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on pose $\varphi_k = \varphi \circ f^k$.

— On a $F = \bigcap_{\Psi \in H} \text{Ker } \Psi = \bigcap_{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket} \text{Ker } \varphi_k$ car la première inclusion est évidente et l'inclusion réciproque provient du fait que tout élément de H est combinaison linéaire des formes $\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}$.

— Soit $x \in F$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a $\varphi_k(x) = 0$ et, par suite, $\varphi_k(f(x)) = \varphi_{k+1}(x) = 0$ avec $\varphi_p = 0$, donc F est stable par f .

— Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F \cap G$, alors il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(e)$ et pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a $\varphi_k(x) = 0$. Si $x \neq 0$, on considère i le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$, alors d'une part $\varphi_{p-1-i}(x) = 0$ et d'autre part $\varphi_{p-1-i}(x) = \lambda_i \varphi_{p-1}(e) \neq 0$, ce qui est absurde.

NOYAUX ET IMAGES ITÉRÉS

— Montrons que $\dim F = n - p$.

La famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1})$ est libre dans E^* on la complète donc en $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}, \varphi_p, \dots, \varphi_{n-1})$ une base de E^* . L'application

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto (\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) \end{cases}$$

est linéaire et injective, et puisque $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$, alors il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Finalement l'application

$$\Psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto (\varphi_0(x), \dots, \varphi_{p-1}(x)) \end{cases}$$

est linéaire surjective dont le noyau F et par le théorème du rang $\dim E = \dim \text{Ker} \Psi + \text{rg}(\Psi)$, donc $\dim F = n - p$

On conclut donc que $E = F \oplus G$