

PRODUIT DE KRONECKER

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A, B \in E = M_n(\mathbb{K})$.

Soit $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par:

$$\Phi_{A,B} : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ M & \longmapsto AM - MB \end{cases}$$

On rappelle que:

- ${}^tA$ désigne la transposée de A
- $\text{Sp}_K(A)$ désigne le spectre de A dans $\mathbb{K}$
- $\text{Sp}_K(\Phi_{A,B})$ désigne le spectre de $\Phi_{A,B}$ dans $\mathbb{K}$
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$
- Pour tout $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ avec δ est le symbole de Kronecker

Partie I: Diagonalisation de $\Phi_{A,B}$

1. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement, si ${}^tB$ l'est
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. (a) Montrer que si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de ${}^tB$ alors X^tY est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$
(b) En déduire l'inclusion $\{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\} \subset \text{Sp}(f)$
4. Soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$ et M un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre α
(a) Montrer que pour tout entier naturel k , $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$
(b) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)M = MP(B + \alpha I_n)$
(c) En déduire que $\chi_A(B + \alpha I_n)$ n'est pas inversible
(d) En factorisant χ_A dans $\mathbb{C}[X]$, déduire que $\text{Sp}(\Phi_{A,B}) \subset \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\}$
5. **Applications:**
(a) Montrer que $\Phi_{A,B}$ est nilpotent si, et seulement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont nilpotentes.
(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\Phi_{A,B}$ soit nul
6. Montrer que si A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$
(a) Montrer que la famille $(X_i^t s Y_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$
(b) Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
7. On suppose que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable en temps qu'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$
(a) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, justifier que $\bar{\lambda} - \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B})$
(b) En déduire que χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$
(c) Soit M (resp X) un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ (resp B) associé à une valeur propre α (resp μ). Calculer $A(MX)$ en fonction de MX
(d) Montrer que pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, l'application linéaire $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \longmapsto MX$ est surjective
(e) En déduire que A est diagonalisable
8. (a) Soit $T : E \longrightarrow E$, $M \longmapsto {}^tM$.
Montrer que T est un automorphisme d'espaces vectoriels de E
(b) Déduire que $\Phi_{-{}^tB, -{}^tA}$ et $\Phi_{A,B}$ sont semblables.
(c) Conclure que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable si, et seulement, si A et B le sont.

Partie II: Étude via les translations

Dans la suite on note les endomorphismes de E suivants:

$$g_A : M \longmapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \longmapsto MB$$

PRODUIT DE KRONECKER

9. (a) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(g_A) = g_{P(A)}$ et $P(d_B) = d_{P(B)}$
 (b) En déduire que g_A (resp d_B) est diagonalisable si, et seulement, si A (resp B) l'est
10. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel F de dimension finie tels que u et v commutent.
 (a) Justifier que les sous-espaces propres de u sont stables par v
 (b) Montrer que l'endomorphisme induit v_λ par v sur chaque sous-espace propre Φ_λ de u est diagonalisable
 (c) En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base
11. Retrouver ainsi le résultat de 6)
12. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\Phi_{A,B}^p$
 (b) Retrouver que si A et B sont nilpotentes alors $\Phi_{A,B}$ l'est

Partie III: Rang de la composée des translations

13. Soit F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u, v \in \mathcal{L}(F)$.
 On note $A_{u,v} = \{uav, a \in \mathcal{L}(F)\}$
 (a) Vérifier que $A_{u,v}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F)$
 (b) Montrer que

$$b \in A_{u,v} \iff \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(b) \quad \text{et} \quad \text{Im}(b) \subset \text{Im}(u)$$

 (c) Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(v)$ dans F . Montrer que les espaces vectoriels $A_{u,v}$ et $\mathcal{L}(G, \text{Im}(u))$ sont isomorphes. En déduire $\dim(A_{u,v}) = \text{rg}(u) \times \text{rg}(v)$
14. **Etude d'une application:**
 Dans la suite, on considère $\varphi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par $\varphi_{A,B} = g_A d_B$ ainsi

$$\varphi_{A,B} : M \mapsto AM^t B$$

- (a) Vérifier que $\varphi_{A,B} \circ \varphi_{C,D} = \varphi_{AC,BD}$
- (b) En déduire $\text{rg}(\varphi_{A,B}) = \text{rg}(A) \text{rg}(B)$
- (c) A quelle condition $\varphi_{A,B}$ est-il inversible, donner son inverse
- (d) A quelle condition $\varphi_{A,B}$ est-il nul?

Partie IV: Produit de Kronecker

On ordonne la base canonique de E par ligne:

$$\mathcal{B} = (E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn})$$

15. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_{A,B}) = A \otimes B$ où

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

16. Vérifier que, si on ordonne la base canonique de E par colonne:

$$\mathcal{B}' = (E_{11}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nn})$$

On obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi_{A,B}) = B \otimes A$$

17. Établir pour A, B, C et $D \in E$:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

18. Calculer les déterminants des matrices $I_n \otimes B$, $A \otimes I_n$ et $A \otimes B$

PRODUIT DE KRONECKER

19. Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $A \otimes B$ l'est aussi.

20. Diagonaliser la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

21. Montrer que si A et B sont trigonalisables alors $A \otimes B$ est trigonalisable et si on pose $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ et

$$\chi_B = \prod_{j=1}^n (X - \mu_j), \text{ calculer } \chi_{A \otimes B} \text{ en fonction des } \lambda_i \text{ et } \mu_j$$

22. Vérifier que $\text{Mat}_B(\Phi_{A,B}) = A \otimes I_n - I_n \otimes {}^t B$

23. Dédurre la trace de $\Phi_{A,B}$

PRODUIT DE KRONECKER

Partie I: Diagonalisation de $f_{A,B}$

1. Supposons que B est diagonalisable, alors il existe une matrice D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = PDP^{-1}$. Par transposition $B^T = (P^{-1})^T D^T P^T$ et on termine par les égalités $D^T = D$ et $(P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$, du coup B^T est diagonalisable.

Inversement si B^T est diagonalisable, alors $B = (B^T)^T$ est diagonalisable

2. Soit $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a:

$$\begin{aligned} f_{A,B}(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)B \\ &= \alpha AM + AN - \alpha MB - NB \\ &= \alpha(AM - MB) + AN - NB \\ &= \alpha f_{A,B}(M) + f_{A,B}(N) \end{aligned}$$

Donc $f_{A,B}$ est linéaire

3. (a) Soit X est un vecteur propre de A associé à α et Y un vecteur propre de B^T associé à β , alors

$$\begin{aligned} f_{A,B}(XY^T) &= AXY^T - XY^TB \\ &= (AX)Y^T - X(B^TY)^T \\ &= \alpha XY^T - \beta XY^T = (\alpha - \beta)XY^T \end{aligned}$$

Par définition $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$, alors il existe $i_0, j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Ainsi la matrice $XY^T = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est non nulle car son coefficient de position (i_0, j_0) est $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$

- (b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $\mu \in \text{Sp}(B) = \text{Sp}(B^T)$, alors il existe un vecteur propre X de A associé à λ et un vecteur propre Y de B^T associé à μ . D'après la question précédente XY^T est un vecteur propre de f associé à $\lambda - \mu$. Ainsi $\lambda - \mu \in \text{Sp}(f_{A,B})$, puis l'inclusion $\{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\} \subset \text{Sp}(f_{A,B})$

4. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

— Le résultat est évidemment vrai pour $k = 0$;

Noter bien que $M^0 = (\alpha I_n + B)0 = I_n$

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et montrons que $A^{k+1} M = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$. On a d'abord $f_{A,B}(M) = \alpha M$, donc $AM - MB = \alpha M$ et on trouve $AM = M(\alpha I_n + B)$. Donc $A^{k+1} M = AA^k M = AM(\alpha I_n + B)^k = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$.

- (b) Soit un polynôme P , à coefficients dans $\mathbb{K}$, on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et donc $P(A)M = \sum_{k=0}^d a_k A^k M =$

$$\sum_{k=0}^d a_k M(\alpha I_n + B)^k = M \sum_{k=0}^d a_k (\alpha I_n + B)^k = MP(\alpha I_n + B).$$

- (c) i. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $M\chi_A(\alpha I_n + B) = 0$ notons $S = \chi_A(\alpha I_n + B)$. Si S était inversible, alors $MS = 0 \implies MSS^{-1} = M = 0$ ce qui est impossible puisque M est un vecteur propre, donc la matrice $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible.

ii. Un produit de matrices $\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} ((\alpha - \lambda)I_n + B)^{m_\lambda}$ n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible, donc $\exists a \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\alpha - a)I_n + B$ n'est pas inversible

5. Posons $b = a - \alpha \in \text{Sp}(B)$. Ainsi on a pu écrire $\alpha = a - b$ pour un certain couple $(a, b) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)$, donc l'inclusion $\text{Sp}(f_{A,B}) \subset \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\}$

6. Applications:

- (a) $\implies$ Supposons que $f_{A,B}$ est nilpotent, alors $\text{Sp}(f_{A,B}) = \{0\}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{\lambda\}$, donc $\text{Sp}(A - \lambda I_n) = \text{Sp}(B - \lambda I_n) = \{0\}$ et les deux matrices sont nilpotentes

PRODUIT DE KRONECKER

$\Leftrightarrow$ S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que les deux matrices $\text{Sp}(A - \lambda I_n) = \text{Sp}(B - \lambda I_n) = \{0\}$ sont nilpotentes, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{\lambda\}$ et par suite $\text{Sp}(f_{A,B}) = \{0\}$, ainsi $f_{A,B}$ est nilpotent

(b) $\Rightarrow$ S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = B = \lambda I_n$, alors $f_{A,B} = 0$

$\Leftrightarrow$ Supposons que $f_{A,B} = 0$, alors pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, on a $AM = MB$. Écrivons $A =$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} \text{ et } B = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j} E_{i,j} \text{ dans la base canonique de } M_n(\mathbb{K}), \text{ pour } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a}$$

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

et

$$E_{i,j}B = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} b_{k,\ell} E_{i,j} E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^n b_{j,\ell} E_{i,\ell}$$

L'égalité $AE_{i,j} = E_{i,j}B$ montre que $a_{i,i} = b_{j,j}$ et pour $k \neq i$ et $\ell \neq j$, on a $a_{k,i} = b_{j,\ell} = 0$, ceci est vrai pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors en posant $\lambda = a_{1,1} = b_{1,1}$, on a bien $A = B = \lambda I_n$

7. Supposons que $\sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite par un $\bar{Z}_j$ où $1 \leq j \leq p$ fixe, mais quelconque

d'où $\sum_{i=1}^p a_i Y_i = 0$ où $a_i = {}^t Z_i \bar{Z}_j$, or $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en

particulier $a_j = {}^t Z_j \bar{Z}_j = \|Z_j\|_2^2 = 0$ et donc $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, Z_j = 0$.

La réciproque est bien évidente.

8. (a) Soit $(\alpha_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{K}^{n^2}$ tels que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{i,j} X_i {}^t Y_j = 0$ et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ posons $Z_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} Y_j$. On a alors

$\sum_{i=1}^p X_i {}^t Z_i = 0$ et la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les Z_i sont tous nuls. La famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les $\alpha_{i,j}$ sont tous nuls. La famille $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre de cardinal n^2 qui est la dimension de $M_n(\mathbb{K})$, donc c'est bien une base de $M_n(\mathbb{K})$

(b) La base $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $f_{A,B}$, donc $f_{A,B}$ est diagonalisable

9. (a) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, car la matrice A est réelle, donc $\bar{\lambda} - \mu \in \text{Sp}(f_{A,B})$

(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. Les valeurs propres de $f_{A,B}$ sont réelles, en particulier $\lambda - \mu$ et $\bar{\lambda} - \mu$ sont réelles et par différence $2i\text{Im}(\lambda) = \lambda - \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Ainsi λ est réel et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$, donc χ_A est scindé. De même χ_B est aussi scindé

(c) Par hypothèse $f_{A,B}(M) = \alpha M$ et $BX = \mu X$, donc

$$\begin{aligned} A(MX) &= f_{A,B}(M)X + MBX \\ &= \alpha MX + \mu MX \\ &= (\alpha + \mu)MX \end{aligned}$$

(d) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, l'application $E \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}), M \mapsto MX$ est clairement linéaire. Soit $Y \in$

$M_{n,1}(\mathbb{R})$, comme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est non nulle, alors il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Soit M la matrice

dont la i_0 -ème colonne vaut $\frac{1}{x_{i_0}} Y$ et dont toutes les autres colonnes sont nulles, on a bien $MX = Y$

(e) Soit X un vecteur propre de B et $(M_1, \dots, M_n)$ une base de diagonalisation de $f_{A,B}$ et posons $Y_i = M_i X$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la surjection précédente $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille génératrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont on peut extraire une base β . D'après la question 9c une telle base est constituée de vecteurs propres de A . Donc A est diagonalisable

10. (a) $T : E \rightarrow E, M \mapsto M^T$ est linéaire vérifiant $T^2 = \text{id}_E$, donc T est un automorphisme de E

PRODUIT DE KRONECKER

(b) Soit $M \in E$, on a:

$$\begin{aligned} T \circ f_{A,B} \circ T^{-1}(M) &= T \circ f_{A,B}({}^t M) \\ &= T(A {}^t M - {}^t M B) \\ &= M {}^t A - {}^t B M \\ &= f_{-{}^t B, -{}^t A}(M) \end{aligned}$$

Donc $f_{-B^T, -A^T}$ et $f_{A,B}$ sont semblables

(c) $\Leftarrow$ D'après la question 8

$\Rightarrow$ A est diagonalisable, d'après la question 9.

Les deux applications $f_{-B^T, -A^T}$ et $f_{A,B}$ sont semblables donc $f_{-B^T, -A^T}$ est diagonalisable, et toujours d'après la question 9, ${}^t B$ est diagonalisable, donc B l'est aussi

Partie II: Étude via les translations

11. Dans la suite on note les endomorphismes de E suivants:

$$g_A : M \mapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \mapsto MB$$

(a) On vérifie par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$ que $g_A^k = g_{A^k}$ et $d_B^k = d_{B^k}$, puis par linéarité pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(g_A) = g_{P(A)}$ et $P(d_B) = d_{P(B)}$

(b) D'après la question précédente un polynôme est annulateur de A si, et seulement, s'il est annulateur de g_A . g_A est diagonalisable si, et seulement, s'il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de g_A si, et seulement, s'il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de A si, et seulement, si A est diagonalisable.

De même pour B

12. (a) u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre

(b) L'endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable

(c) Posons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, m_i l'ordre de multiplicité de λ_i , $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_F)$, $\mathcal{B}_i$ base de F_i et $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ base adaptée à la décomposition $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{m_1}} & & (0) \\ & \boxed{\lambda_2 I_{m_2}} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \boxed{\lambda_p I_{m_p}} \end{pmatrix}$$

Or pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'endomorphisme v_{λ_i} est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{C}_i$ de F_i pour laquelle $D_i = \text{Mat}_{\mathcal{C}_i}(v_{\lambda_i})$ est diagonale. Soit finalement $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{C}_i$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & (0) \\ & \boxed{D_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & \boxed{D_p} \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\mathcal{C}$ est une base de diagonalisation de u et v .

13. Si A et B sont diagonalisables, alors g_A et d_B le sont aussi, avec g_A et d_B commutent, il vient qu'ils sont simultanément diagonalisables, donc $f_{A,B} = g_A - d_B$ est diagonalisable

14. (a) Pour $p \geq 1$, les deux endomorphismes g_A et d_B commutent, donc, d'après la formule de binôme de Newton

$$\begin{aligned} f_{A,B}^p &= (g_A - d_B)^p \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k g_A^k d_B^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k g_{A^k} d_{B^{p-k}} \end{aligned}$$

PRODUIT DE KRONECKER

- (b) Si A et B sont nilpotentes alors $A^n = B^n = 0$ et, par suite, $f_{A,B}^{2n} = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k g_{A^k} d_{B^{2n-k}}$. Or pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, l'un des entiers k et $2n - k$ est supérieur ou égal à n , donc tous les termes figurant dans le second membre de l'égalité précédente sont nuls

Partie III: Rang de la composée des translations

15. (a) $A_{u,v}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(F)$, stable par combinaison
(b) Soit $b \in A_{u,v}$, alors il existe $a \in \mathcal{L}(F)$ tel que $b = uav$ et, par suite,

$$\text{Ker } v \subset \text{Ker } b \quad \text{et} \quad \text{Im } b \subset \text{Im } u$$

- (c) Soit $x \in F$, on décompose $v(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i$ d'où $a(v(x)) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$ et $u(a(v(x))) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u(u_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i b(v_i) = b\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) = b(y)$ avec $y = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$. Par ailleurs, $v(y) = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = v(x)$, donc $x - y \in \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(b)$, soit $b(x) = b(y) = (uav)(x)$

- (d) Considérons l'application $\Phi : \begin{cases} A_{u,v} & \longrightarrow & \mathcal{L}(G, \text{Im}(u)) \\ b & \longmapsto & b|_G \end{cases}$. Φ est clairement linéaire et si $b \in \text{Ker}(\Phi)$ alors $\text{Ker}(b)$ contient G et $\text{Ker}(v)$, d'où $b = 0$ puisque $G \oplus \text{Ker}(v) = F$. Ainsi Φ est injective. De plus, si $\psi \in \mathcal{L}(G, \text{Im}(u))$, soit b l'application linéaire sur F définie par $b|_G = \psi$ et $b|_{\text{Ker}(v)} = 0_{\mathcal{L}(\text{Ker}(v), \text{Im}(u))}$. On a $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(b)$, $\text{Im}(b) \subset \text{Im}(u)$ et $b|_G = \psi$ par construction, d'où $b \in A_{u,v}$ et $\Phi(b) = \psi$, ce qui prouve que Φ est surjective et finalement c'est un isomorphisme. On en déduit que $\dim(A_{u,v}) = \text{rg}(u) \times \text{rg}(v)$

16. Etude d'une application:

- (a) Calcul
(b) Question précédente
(c) $\varphi_{A,B}$ est inversible si, et seulement, si $\text{rg}(\varphi_{A,B}) = n^2$ si, et seulement, si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n$ si, et seulement, si A et B sont inversibles. Auquel cas

$$\varphi_{A,B}^{-1} = \varphi_{A^{-1}, B^{-1}}$$

- (d) $\varphi_{A,B} = 0$ si, et seulement, si $\text{rg}(A)\text{rg}(B) = 0$, soit si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

Partie IV: Produit de Kronecker

17. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors $E_{i,j}$ représente le $n.i + j$ -ème vecteur de la base $\mathcal{B}$. En écrivant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $b = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(E_{i,j}) &= \sum_{1 \leq k, \ell, p, q \leq n} a_{k,\ell} b_{q,p} E_{k,\ell} E_{i,j} E_{p,q} \\ &= \sum_{1 \leq k, q \leq n} a_{k,i} b_{q,j} E_{k,q} \end{aligned}$$

PRODUIT DE KRONECKER

Donc la $ni + j$ -ème colonne de $\text{Mat}_B(\varphi_{A,B})$ vaut

$$\begin{pmatrix} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{nj} \\ a_{2i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{2i}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{ni}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni}b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i}B_j \\ a_{2i}B_j \\ \vdots \\ a_{ni}B_j \end{pmatrix}$$

Le second membre vaut la $ni + j$ -ème colonne de $A \otimes B$, donc les deux matrices $\text{Mat}_B(\varphi_{A,B})$ et $A \otimes B$ coïncident, puisque elles sont de même type et elles ont les mêmes colonnes

18. De même que la question précédente

19. La relation $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ résulte de la relation $\varphi_{A,B} \circ \varphi_{C,D} = \varphi_{AC,BD}$

20. — $I_n \otimes B$ est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux égaux à B , donc $\det(I_n \otimes B) = \det(B)^n$

— $A \otimes I_n$ et $I_n \otimes A$ sont semblables donc ont même déterminant. D'où $\det(A \otimes I_n) = \det(I_n \otimes A) = \det(A)^n$

— Enfin, $A \otimes B = (A \otimes I_n) \cdot (I_n \otimes B)$ d'où $\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^n$

21. Si $A = \mathbf{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $B = \mathbf{diag}(b_1, \dots, b_n)$ alors $A \otimes B = \mathbf{diag}(a_1b_1, \dots, a_1b_n, \dots, a_nb_1, \dots, a_nb_n)$.

Si $A = PA_1P^{-1}$ et $B = QB_1Q^{-1}$ avec A_1 et B_1 sont diagonales, alors

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (PA_1P^{-1}) \otimes (QB_1Q^{-1}) \\ &= (P \otimes Q)(A_1 \otimes B_1)(P^{-1} \otimes Q^{-1}) \\ &= (P \otimes Q)(A_1 \otimes B_1)(P \otimes Q)^{-1} \end{aligned}$$

22. On a bien $M = A \otimes B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice A est réelle symétrique, donc elle est diagonalisable et $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice B est diagonalisable, car $\chi_B = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ est scindé à racines simples, et $P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc M est diagonalisable et $P^{-1}MP = \mathbf{diag}(0, 0, -2, 4)$ avec

$$P = P_1 \otimes P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Si A et B sont triangulaires supérieures alors $A \otimes B$ est triangulaire supérieure par blocs et les blocs diagonaux sont les multiples de B donc sont aussi triangulaires supérieurs.

Si $A = PA_1P^{-1}$ et $B = QB_1Q^{-1}$ avec A_1 et B_1 sont triangulaires supérieures, alors $A \otimes B = (P \otimes Q)(A_1 \otimes B_1)(P \otimes Q)^{-1}$, donc $A \otimes B$ est trigonalisable dont la diagonale vaut $(a_1b_1, \dots, a_1b_n, \dots, a_nb_1, \dots, a_nb_n)$.

Donc $\chi_{A \otimes B}(X) = \chi_{A_1 \otimes B_1}(X) = \prod_{(i,j) \in [1,n]^2} (X - \lambda_i \mu_j)$

PRODUIT DE KRONECKER

24. Soit $M \in E$, on a

$$\begin{aligned} f_{A,B}(M) &= AM - MB \\ &= AMI_n - I_n M^t({}^t B) \\ &= \varphi_{A,I_n}(M) - \varphi_{I_n,{}^t B}(M) \\ &= (\varphi_{A,I_n} - \varphi_{I_n,{}^t B})(M) \end{aligned}$$

Donc $f_{A,B} = \varphi_{A,I_n} - \varphi_{I_n,{}^t B}$, en conséquence les deux endomorphismes ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$, alors
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{A,B}) = A \otimes I_n - I_n \otimes B^T$

25. $\text{Tr}(f_{A,B}) = n(\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B))$