

CONNEXITÉ PAR ARCS DE $SO_n(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ et que $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

2. Montrer que $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$

3. On définit l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) Montrer que Φ est continue

(b) Montrer que $\Phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$.

(c) Justifier que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs de $M_2(\mathbb{R})$

4. Dans cette question on montrera que **Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n \geq 3$**

(a) Si $U \in SO_n(\mathbb{R})$, on rappelle qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, des entiers naturels p, q et r vérifiant $p + q + 2r = n$, et, si $r \neq 0$, des réels $\theta_1, \dots, \theta_r$, éléments de $]0, 2\pi[\setminus \{0\}$, tels que la matrice $P^{-1}UP$ soit diagonale par blocs de la forme

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix}$$

Montrer alors que $U \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement, si q est pair

(b) Soit $U \in SO_n(\mathbb{R}) \setminus \{I_n\}$

i. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, des entiers naturels p et s vérifiant $p + 2s = n$, et, si $r \neq 0$, des réels $\theta_1, \dots, \theta_s$, éléments de $]0, 2\pi[$, tels que la matrice $P^{-1}UP$ soit diagonale par blocs de la forme

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi(\theta_s) \end{pmatrix}$$

ii. Les notations étant celles de la question (4(b)i), on définit l'application $\Gamma : [0, 1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \Gamma(t) = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi(t\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi(t\theta_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Montrer que Γ est continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ puis que $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma(1) = U$

(c) En utilisant ce qui précède, montrer soigneusement que $SO_n(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $M_n(\mathbb{R})$. Pour connecter deux matrices U_1 et U_2 dans $SO_n(\mathbb{R})$, on pourra d'abord commencer par connecter chacune d'elles à la matrice I_n ,

CONNEXITÉ PAR ARCS DE $SO_n(\mathbb{R})$

- On montre que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$
 - $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
 - Soient $A, B \in O_n(\mathbb{R})$.
 AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$ donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
 - Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.
 A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ donc $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
 $SO_n(\mathbb{R})$ est le noyau de morphisme de groupes $\det$, donc c'est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, on a bien

$$M^T M = I_2 \quad \text{et} \quad \det(M) = a^2 + b^2 = 1$$

Donc $M \in SO_2(\mathbb{R})$.

Inversement soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$, les relations ${}^t M M = I_2$ et $M {}^t M = I_2$ entraînent le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \quad \text{et le calcul du déterminant de } M \text{ donne } ad - bc = 1, \text{ ainsi on obtient}$$

$$(a - d)^2 + (b + c)^2 = a^2 + d^2 + c^2 + b^2 + 2(bc - ad) = 0$$

Donc $d = a$ et $c = -b$

- Φ est continue car ses fonctions composantes $\sin$ et $\cos$ sont continues
 - Soit $\theta \in \mathbb{R}$, d'après la question 2., la matrice $\Phi(\theta)$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$. Ainsi la première inclusion $\Phi(\mathbb{R}) \subset SO_2(\mathbb{R})$.

Inversement soit $M \in SO_2(\mathbb{R})$, d'après la question 2., il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Mais l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ assure l'existence d'un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$ et par suite $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \Phi(\theta)$. On en déduit la deuxième inclusion $SO_2(\mathbb{R}) \subset \Phi(\mathbb{R})$

- $SO_2(\mathbb{R}) = \Phi(\mathbb{R})$ est l'image de $\mathbb{R}$, qui est connexe par arcs, par une application continue, donc c'est un connexe par arcs
- Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs pour $n \geq 3$**
 - $U \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement, si $\det(U) = 1$. Or

$$\det(U) = \det(P^{-1}UP) = \det(-I_q) \prod_{i=1}^r \det(\Phi(\theta_i)) = (-1)^q$$

Cette dernière valeur vaut 1 si, et seulement, si q est pair

- Soit $U \in SO_n(\mathbb{R}) \setminus \{I_n\}$

i. On écrit

$$P^T U P = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Phi(\theta_r) \end{pmatrix}$$

On ne peut pas avoir à la fois $r = 0$ et $q = 0$ car $U \neq I_n$. Ainsi si $q = 0$ c'est fini, sinon q est pair et la matrice $-I_q$ peut s'exprimer par blocs

$$-I_q = \begin{pmatrix} -I_2 & & (0) \\ & -I_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & -I_2 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbb{R})$$

CONNEXITÉ PAR ARCS DE $SO_n(\mathbb{R})$

Puisque $-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Phi(\pi)$, on prend alors $\phi_1 = \dots = \phi_{\frac{q}{2}} = \pi$ et on change d'indice pour obtenir l'expression demandée

ii. Il est clair que Γ à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ et que $\Gamma(0) = I_n$ et $\Gamma(1) = U$. L'application

$$t \in [0, 1] \mapsto \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi(t\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi(t\theta_s) \end{pmatrix} \in SO_n(\mathbb{R})$$

est continue car ses composantes son continues à savoir les identités de $\mathbb{R}$ et les fonctions $t \in [0, 1] \mapsto \cos(t\theta_i)$ et $t \in [0, 1] \mapsto \sin(t\theta_i)$. En outre

$$A \in SO_n(\mathbb{R}) \mapsto PA^tP$$

est continue, car c'est la restriction d'une application linéaire en dimension finie. Ainsi par composition Γ est continue sur $[0, 1]$

(c) Soient $U_1, U_2 \in SO_n(\mathbb{R})$.

- Si l'une des matrices U_1 ou U_2 égale I_n , c'est fini
- Sinon, soit Γ_1 (resp Γ_2) le chemin défini auparavant joignant I_n et U_1 (resp I_n et U_2). On considère l'application Γ définie sur $[0, 1]$ par

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_1(1-2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \Gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Γ est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $SO_n(\mathbb{R})$ et elle vérifie $\Gamma(0) = U_1$ et $\Gamma(1) = U_2$