

DISTANCE D'UN POINT À UNE PARTIE

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . L'ensemble $\{\|x - a\|/a \in A\}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On notera $d(x, A)$ cette borne inférieure et on écrira plus simplement

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Lorsqu'il existe $\alpha \in A$, $d(x, A) = \|x - \alpha\|$ on dit que la distance de x à A est atteinte en α

Partie I: Propriétés de la distance

1. Soit B une partie de E . Montrer que si $A \subset B$ alors $d(x, B) \leq d(x, A)$
2. Montrer que $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$
3. Montrer que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$
4. Calculer $d(x, A)$ si A est dense dans E
5. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$
(b) En déduire que $f: E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$, est 1-lipschitzienne
(c) Que dire de la continuité de f
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose, $U_n = \left\{x \in E / d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$
(a) Montrer que U_n est un ouvert de E .
(b) Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$
(c) En déduire que tout fermé de E peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts de E .
7. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in A, d(x, A) \leq \|x_n - x\| < d(x, A) + \frac{1}{n}$
(b) En déduire : $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$
8. On suppose que E est de dimension finie et A fermée de E .
(a) Montrer que la suite (x_n) est bornée
(b) En déduire qu'il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $a \in A$.
(c) Justifier que $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\varphi(n)} - x\|$, en déduire que $d(x, A) = \|x - a\|$

Partie II: Cas d'un convexe fermé dans un euclidien

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit A est une partie convexe et fermée de E .

9. (a) Montrer l'identité du parallélogramme:

$$\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

- (b) En déduire que si x, b et c sont trois points de E , alors

$$4 \left\| x - \frac{b+c}{2} \right\|^2 + \|b - c\|^2 = 2(\|x - b\|^2 + \|x - c\|^2). \quad (*)$$

10. Montrer à l'aide de $(*)$ que si $d(x, A)$ est atteinte en b et c tel que $b \neq c$ alors :

$$\left\| x - \frac{b+c}{2} \right\| < \|x - b\|$$

11. En déduire que $d(x, A)$ est atteinte en un et un unique point $a \in A$.

DISTANCE D'UN POINT À UNE PARTIE

Partie I: Propriétés de la distance

1. Soit $a \in A$, on a $a \in B$, donc $d(x, B) \leq \|x - a\|$. ceci vrai pour tout $a \in A$, donc

$$d(x, B) \leq \inf \{\|x - a\| \mid a \in A\} = d(x, A)$$

2. Comme $A \subset \overline{A}$, alors $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$.

Réciproquement soit $y \in \overline{A}$, alors il existe (a_n) une suite d'éléments de A de limite y . Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'inégalité

$$d(x, A) \leq \|x - a_n\|$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et on tient compte de la continuité de la norme, on obtient

$$d(x, A) \leq \|x - y\|$$

Ceci vrai pour tout $y \in \overline{A}$, donc

$$d(x, A) \leq \inf \{\|x - y\| \mid y \in \overline{A}\} = d(x, \overline{A})$$

Ainsi $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$

3. Soit $x \in E$.

$\Leftrightarrow$ Si $x \in \overline{A}$, alors $d(x, \overline{A}) = 0$, puis $d(x, A) = 0$

$\Rightarrow$ Si $d(x, A) = 0$, alors, par la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$, donc $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ainsi $x \in \overline{A}$

4. Si A est dense dans E , alors $\overline{A} = E$, donc pour tout $x \in E$, on a $d(x, A) = 0$

5. (a) Soit $a \in A$, on a :

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

On en déduit :

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$$

pour tout a de A et, par conséquent, $d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$.

On a ainsi $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$, et, par symétrie, $d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|$. Cela entraîne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

Donc $\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$

(b) On a: $\forall (x, y) \in E^2, |f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

Donc f est 1-lipschitzienne

(c) f est continue car elle est lipschitzienne

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose, $U_n = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$

(a) Notons que $U_n = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\} = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[\right)$ qui l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Donc U_n est un ouvert de E .

(b) Si $x \in \overline{A}$, alors $d(x, A) = 0 < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$.

Inversement si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$d(x, A) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $d(x, A) = 0$. Soit $x \in \overline{A}$.

(c) Soit A un fermé de E , la suite d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ construite ainsi est décroissante dont l'intersection égale à $\overline{A} = A$.

DISTANCE D'UN POINT À UNE PARTIE

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $x_n \in A$ tel que
- $$\|x_n - x\| < d(x, A) + \frac{1}{n}$$
- (b) La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ construite dans la question précédente et les encadrements $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x, A) \leq \|x_n - x\| < d(x, A) + \frac{1}{n}$ donne $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$
8. On suppose que E est de dim finie et A fermée de E .
- (a) La suite $(\|x_n - x\|)$ est convergente, donc elle est bornée et, par suite, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que: $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - x\| \leq M$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq M + \|x\|$$

Donc la suite (x_n) est bornée

- (b) D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $a \in A$.
- (c) Par la continuité de la fonction norme $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{\varphi(n)} - x\|$, puis par unicité de la limite on déduit que $d(x, A) = \|x - a\|$

Partie II: Cas d'un convexe fermé dans un euclidien

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien et $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit A est une partie convexe et fermée de E .

9. (a) Soit $u, v \in E$, la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne, on a l'identité remarquable (égalité d'Al-Kashi):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad \text{bilinéarité et symétrie du produit scalaire} \end{aligned}$$

en remplaçant v par $-v$ dans cette égalité, on obtient

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

On somme les deux identités remarquables précédentes et on obtient

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

- (b) On applique l'identité du parallélogramme aux vecteurs $u = x - b$ et $v = x - c$, on obtient

$$u + v = 2\left(x + \frac{b+c}{2}\right) \quad \text{et} \quad u - v = c - b$$

D'où

$$4\left\|x - \frac{b+c}{2}\right\|^2 + \|b - c\|^2 = 2(\|x - b\|^2 + \|x - c\|^2).$$

10. Si $d(x, A) = \|x - b\| = \|x - c\|$, alors, d'après l'identité du parallélogramme est atteinte en b et c tel que $b \neq c$ alors

$$4\left\|x - \frac{b+c}{2}\right\|^2 + \|b - c\|^2 = 2(\|x - b\|^2 + \|x - c\|^2) = 4\|x - b\|^2$$

Puisque $b \neq c$, alors $\|b - c\| > 0$ puis

$$\left\|x - \frac{b+c}{2}\right\| < \|x - b\|$$

11. L'espace E est de dimension finie et A est fermée, donc, d'après la question 8, la distance $d(x, A)$ est atteinte en un point $a \in A$ et la convexité de A montre l'unicité de ce point