

INÉGALITÉ DE HADAMARD

Notations et rappels

- Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.
- On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle | \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée.
- On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x)|y \rangle = \langle x|s(y) \rangle.$$

- Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \langle s(x)|x \rangle \geq 0 \text{ (respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle s(x)|x \rangle > 0).$$

- Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0 \text{ (respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0).$$

- On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).
- On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \text{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Partie I: Questions préliminaires

- (a) Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.
- (b) Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

- Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . Pour tout vecteur x de E , on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x)|x \rangle.$$

- (a) Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β .
- (b) En déduire l'inclusion : $R_s(S(0, 1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0, 1)$ désigne la sphère unité de E .
- (a) On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

INÉGALITÉ DE HADAMARD

(b) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Partie II: Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \text{Tr}(AS)$.

(a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

(b) Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t .

(c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \text{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t .

Partie III: Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(S) \right)^n \quad (*)$$

9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^tDSD$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\text{Tr}(S_\alpha)$.

10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité (*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard}).$$

INÉGALITÉ DE HADAMARD

Partie IV: Détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta^t \Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t \Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta).$$

13. Démontrer que $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m .

14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{U}$:

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$$

15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{U}$, $\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\det(S))^{1/n}$.

16. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{1/n}$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Déterminer le réel m .

INÉGALITÉ DE HADAMARD

Partie I: Questions préliminaires

1. (a) Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est orthodagonalisable.
Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PD^tP$.
- (b) $\chi_S(X) = X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\text{Sp}(S) = \{0\}$ et, à nouveau, si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux. Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.
2. (a) Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.
- (b) Supposons que $x \in S(0, 1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.
On a bien montré que, pour tout $x \in S(0, 1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.
3. (a) Supposons que s est symétrique défini positif.
Soit λ une valeur propre de s . Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$.
Ainsi $0 < \langle s(x)|x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$.
Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leq \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.
- (b) $s_{i,j}$ est la i -ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$.
En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question (2b), $s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Partie II: Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

4. Les coefficients de ${}^tMM - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M , donc d'après le cours, l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue.
5. A étant orthogonale, donc ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,j}| \leq 1$.
6. Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelque soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ de la question 4, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. (a) D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta^tP$.
Ainsi, $T(A) = \text{Tr}([AP\Delta]P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}[AP\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta)$ en posant $B = P^{-1}AP$.
 A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.
- (b) On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
 $\text{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha \text{Tr}(CS) + \text{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \text{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (c) Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i, j) -ème coefficient d'une matrice M , $T(A) = \sum_{i=1}^n (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,j} \Delta_{j,i}$, mais Δ est diagonale, donc
$$T(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}.$$

INÉGALITÉ DE HADAMARD

D'après la question 5, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leq \text{Tr}(S)$, mais de plus $\text{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \text{Tr}(S)$.

Partie III: Inégalité d'Hadamard

8. L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique, car on sait

$$\text{que } \det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

9. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. ${}^tXS_\alpha X = {}^t(DX)S(DX) \geq 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n ({}^tDSD)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2} [{}^tD]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i}, \text{ mais } D \text{ est diagonale, donc } \text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}.$$

10. On peut appliquer l'inégalité (*) à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$\text{or } \det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i,i} \right)^2 \det(S) \text{ et } \frac{1}{n} \text{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1,$$

$$\text{donc } \det(S) \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{i,i}} \right)^2 = \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

11. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXS_\varepsilon X = {}^tXSX + \varepsilon \|X\|^2 \geq 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 \leq \lambda_1 \leq s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$.

De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0.

Partie IV: Détermination d'un minimum

12. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ${}^tXBX = {}^t(\Omega X)A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$,

donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}([A\Omega\Delta]{}^t\Omega) = \text{Tr}({}^t\Omega[A\Omega\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta).$$

13. D'après la question précédente, $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B {}^t\Omega$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$.

Prenons $x \in \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

14. Par application de l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\text{on obtient } \frac{1}{n} \text{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i} \right)^{1/n}, \text{ ce qui fournit l'inégalité demandée.}$$

15. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n} \geq 1$.

$$\text{Ainsi, d'après la question précédente, } \text{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}.$$

INÉGALITÉ DE HADAMARD

16. Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXDX = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^n \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\text{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc $m = n(\det(S))^{1/n}$.