

POLYNÔMES DE HERMITE

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème.

On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n), y compris le polynôme nul. Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x .

Partie I: Trois résultats utiles par la suite

1. (a) Pour tout entier naturel n , justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- (b) Etablir, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)I_{n-2}$.

- (c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

- (d) Pour toute fonction polynomiale P , justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

2. On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel ℓ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle-même convergente de limite ℓ .

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \frac{C^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$.

- (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbb{N}$) converge et donner sa somme.

- (c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3. Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\max_{t \in [-a, a]} |g^{(n)}(t)| \leq \frac{K^n n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$$

- (a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$$

- (b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

Partie II: Les polynômes de Hermite

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x) Q(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On

notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Ainsi, si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

POLYNÔMES DE HERMITE

2. À l'aide de la base $(1, X, X^2, X^3)$, construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X], < \cdot, \cdot >)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

Pour tout entier naturel n , on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)}$$

où, selon l'usage, $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).

3. (a) Pour tout réel x calculer $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir les relations

$$(1) \quad H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}, \quad (2) \quad H'_n = nH_{n-1}$$

Pour établir (1), on pourra remarquer que $\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} = \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)}$.

- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n , le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

Partie III: $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. (a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} = 0.$$

De même, on montrerait et on **admet** que $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} = 0$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$< H_n, H_0 > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Pour n non nul, on utilisera la définition de H_n .

- (c) Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. En remarquant que

$$< H_n, H_m > = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx$$

et à l'aide d'une intégration par parties que l'on effectuera avec soin, montrer que

$$< H_n, H_m > = m < H_{n-1}, H_{m-1} >$$

- (d) En déduire que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $< H_n, H_n >$?
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k . Que vaut $< H_{k+1}, R >$?
(b) Soit n un entier naturel, k un entier de $[0, n]$ et P un polynôme de degré au plus k . Etablir l'égalité

$$\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. On pourra calculer $< H_{k+1}, Q - P >$.

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], < \cdot, \cdot >)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

- (c) On note $(G_k)_{k \in [0, n+1]}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], < \cdot, \cdot >)$ obtenue par le procédé de SCHMIDT à partir de la base $(X^k)_{k \in [0, n+1]}$. Pour tout $k \in [0, n+1]$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \dots, H_{n+1}$.

POLYNÔMES DE HERMITE

Partie IV: Un développement en série de Hermite

1. Soit P un polynôme de degré au plus $n \geqslant$. Justifier l'égalité suivante :

$$P = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{H_k}{k!}$$

2. Pour tout couple (b, c) de réels vérifiant $b \leqslant c$, on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier n et tout $x \in [b, c]$:

$$\left| \frac{H_n(x)}{n!} \right| \leqslant \frac{K^n}{\left[\frac{n}{2} \right]!}$$

- (a) Soit x un réel donné. À l'aide du 2) de la partie I établir, pour tout réel λ , la convergence de la série de terme général $\frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$.
- (b) Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par

$$g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$$

Pour tout réel λ et tout entier naturel n , calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$ (c'est-à-dire $\frac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n .

- (c) Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3) de la partie I et en déduire que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$:

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$$

3. On note $\exp$ la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.

- (a) Pour tout entier naturel n , justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n \rangle$ sa valeur.

- (b) Calculer $\langle \exp, H_n \rangle$ puis, pour tout réel x
On pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_{n-1} \rangle$
- (c) Conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \frac{H_n(x)}{n!}$$

POLYNÔMES DE HERMITE

Partie I: Trois résultats utiles par la suite

1. (a) $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale I_n n'est impropre qu'en $+\infty$ et $-\infty$.
cause de la parité, d'ailleurs dépendant de n , on peut n'étudier la convergence qu'en $+\infty$

$$x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } x^n e^{-\frac{x^2}{2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'après les théorèmes de comparaison sur les intégrales des fonctions positives et le critère de Riemann ($2 > 1$), I_n est convergente.

- (b) Soit $n \geq 2$, les applications $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto -x^{n-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le produit admet des limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$, alors par une intégration par parties

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^{n-1}) \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^{n-1}) \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-(n-1)x^{n-2}) \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \\ &= (n-1)I_{n-2} \end{aligned}$$

- (c) • L'intégrale I_{2n+1} est convergente et c'est l'intégrale d'une fonction impaire, donc elle est nulle.
• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
• Pour $n = 0$, c'est vrai
• Soit $n \geq 0$. Supposons que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. On a $I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n}$ et par hypothèse de récurrence

$$I_{2n+2} = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

- (d) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Puisque les intégrales impropres convergentes sur $\mathbb{R}$ forment un espace vectoriel,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k I_k &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

2. (a) On sait que la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{(C^2)^n}{n!}$ est convergente, donc son terme général $u_{2n} = \frac{C^{2n}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_{2k} + u_{2k+1} = (1+C)C^{2k}$, puisque la série exponentielle converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + u_{2k+1} = (1+C)e^{C^2}$$

POLYNÔMES DE HERMITE

(c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs

- La famille $(\llbracket 2k, 2k+1 \rrbracket)_{k \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}$
- La famille $(u_n)_{n \in \llbracket 2k, 2k+1 \rrbracket}$ est sommable de somme $u_{2k} + u_{2k+1}$
- $\sum_{k \geq 0} u_{2k} + u_{2k+1}$ est convergente de somme $(C+1)e^{C^2}$

Donc, par le critère de sommabilité, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + u_{2k+1} = (1+C)e^{C^2}$$

3. (a) Pour $\lambda \in [-a, a]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt \right| &\leq \left| \int_0^\lambda \frac{|\lambda-t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\lambda \frac{|\lambda-t|^n}{n!} \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} dt \right| \end{aligned}$$

- Si $\lambda \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt \right| &\leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} dt \\ &\leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{(\lambda K)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \end{aligned}$$

- Si $\lambda < 0$, alors de même

$$\left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{(-\lambda K)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$$

et dans les deux cas

$$\left| \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{(|\lambda| K)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}$$

Or $\frac{(|\lambda| K)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$$

(b) D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n , appliquée à g qui est de $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment de bornes 0 et λ :

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k = g(\lambda) - \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt$$

POLYNÔMES DE HERMITE

et en passant à la limite sur n , on a la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$ et

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Si P est un polynôme de degré d , $P^{(k)} = 0$ dès que $k > d$, et la formule devient la formule de Taylor pour les polynômes.

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^d \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Partie II: Les polynômes de Hermite

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique car $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (\lambda P(x) + Q(x)) R(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x) R(x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} Q(x) R(x) dx \\ &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif, car

$$\langle P, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P^2(x) dx$$

est l'intégrale d'une fonction positive

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini, car $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} P^2(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle, est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, est un produit scalaire.

2. Avec la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt,

- Le premier vecteur $P_0 = 1$
- $P_1 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = X - \frac{I_1}{I_0} 1 = X$
- $P_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle X^2, X \rangle}{\|X\|^2} X = X^2 - 1$
- $P_3 = X^3 - \frac{\langle X^3, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle X^3, X \rangle}{\|X\|^2} X - \frac{\langle X^3, X^2 - 1 \rangle}{\|X^2 - 1\|^2} (X^2 - 1) = X^3 - 3X$

3. (a) $H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$ et $H_3 = X^3 - 3X$

- (b) • D'après la formule de Leibniz à l'ordre n , utilisée avec $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui sont de classe

POLYNÔMES DE HERMITE

$\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 H_{n+1} &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} \\
 &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} \\
 &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n C_n^k (-x)^{(k)} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-k)} \\
 &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(-x C_n^0 \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} - C_n^1 \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} \right) \\
 &= x H_n - n H_{n-1}
 \end{aligned}$$

- En utilisant, à l'avant dernière ligne des calculs suivants,

$$\begin{aligned}
 H'_n &= \left((-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} \right)' \\
 &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} \\
 &= -x H_n - H_{n+1} \\
 &= -x H_n - (x H_n - n H_{n-1}) \\
 &= n H_{n-1}
 \end{aligned}$$

(c) On montre, par récurrence double, que H_n est de degré n , de même parité que n et de coefficient dominant 1

- Lapropriété est vraie pour $n = 0$, $H_0 = 1$ et $n = 1$, $H_1 = X$
- Soit $n \geq 1$. Supposons la vraie pour $n-1$ et n , alors
 - De $H_{n+1} = X H_n - n H_{n-1}$, $\deg(X H_n) = n + 1$, $\deg(-n H_{n-1}) = n - 1$ et de la formule du degré de la somme $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ ou il y a égalité lorsque les degrés de P et Q sont différents, $\deg(H_{n+1}) = n + 1$
 - Le coefficient de X^{n+1} dans $X H_n - n H_{n-1}$ est 1
 - On a :

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(-X) &= (-X) H_n(-X) - n H_{n-1}(-X) \\
 &= -X (-1)^n H_n(X) - n (-1)^{n-1} H_{n-1}(X) \\
 &= (-1)^{n+1} (X H_n(X) - n H_{n-1}(X)) \\
 &= (-1)^{n+1} H_{n+1}(X)
 \end{aligned}$$

Récurrence achevée

Partie III: $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. (a) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} P(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$

- Si $n = 0$, $H_0 = 1$ et $\langle H_0, H_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = I_0 = 1$

POLYNÔMES DE HERMITE

- Si $n > 0$,

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(-1)^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

- (c) Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx \end{aligned}$$

Les applications $x \mapsto \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)}$ et $x \mapsto H_m$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le produit admet des limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$, alors par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx &= \left[H_m \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \\ &= -m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_m \rangle &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) (-1)^{n-1} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \\ &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) H_{n-1}(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \\ &= m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle \end{aligned}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m! \langle H_{n-m}, H_0 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ n! & \text{si } m = n \end{cases}$$

On conclut que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$

2. (a) $(H_n)_{n \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$ qui ne contient pas le vecteur nul ($\langle H_n, H_n \rangle = n! \neq 0$), c'est donc une famille libre de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

POLYNÔMES DE HERMITE

On peut décomposer $R \in \mathbb{R}_k[X]$ dans cette base, $R = \sum_{n=0}^k r_n H_n$ et

$$\begin{aligned} \langle R, H_{k+1} \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^k r_n H_n, H_{k+1} \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^k r_n \langle H_n, H_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^k r_n 0 = 0 \end{aligned}$$

donc $\langle H_{k+1}, R \rangle = 0$

- (b) Le coefficient de X^{k+1} dans $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$ est nul, puisque H_{k+1} est unitaire, donc $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ et $Q - P$ aussi, on a donc $H_{k+1}Q - P$. On peut utiliser la formule de Pythagore,

$$\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}Q - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_{k+1}[X]$, le projection orthogonale de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$ est l'unique vecteur P qui réalise le minimum de $\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$, c'est donc Q , $X^{k+1} - H_{k+1}$ est la projection orthogonale de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$

- (c) Lorsque l'on orthonormalise $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, on construit le $(k+1)$ -ème G_{k+1} en normalisant le vecteur

$$X^{k+1} - \sum_{\ell=0}^k \langle X^{k+1}, G_\ell \rangle G_\ell$$

mais $\sum_{\ell=0}^k \langle X^{k+1}, G_\ell \rangle G_\ell$ est la projection orthogonale de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$, on vient de voir que c'est $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$, on a donc

$$X^{k+1} - \sum_{\ell=0}^k \langle X^{k+1}, G_\ell \rangle G_\ell = X^{k+1} - (X^{k+1} - H_{k+1}) = H_{k+1}$$

G_{k+1} est donc obtenu en normalisant H_{k+1} , de norme $\sqrt{(k+1)!} : \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $G_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k$

Partie IV: Un développement en série de Hermite

1. $(G_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base orthonormale :

$$P = \sum_{k=0}^n \langle P, G_k \rangle G_k = \sum_{k=0}^n \left\langle P, \frac{H_k}{\|H_k\|} \right\rangle \frac{H_k}{\|H_k\|} = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{H_k}{k!}$$

2. (a) Soit $[b, c]$ un intervalle, pour $x \in [b, c]$, on a $\left| \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n \right| \leq \frac{(K|\lambda|)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, il résulte des théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs et de la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(K|\lambda|)^k}{\left[\frac{k}{2}\right]!}$, que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{H_k(x)}{k!} \lambda^k$ est convergente, car absolument convergente, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque l'intervalle $[b, c]$ est quelconque.

- (b) Montrons par récurrence sur n que $g_x^{(n)}(\lambda) = (-1)^n H_n(\lambda - x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$

- C'est vrai pour $n = 0$:

$$g_x(\lambda) = \left(e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \right)^{(0)} = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} = H_0(\lambda - x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$$

POLYNÔMES DE HERMITE

- Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété pour n , alors par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} g_x^{(n+1)}(\lambda) &= \left(e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \right)^{(n+1)} = (-1)^n \frac{\partial(H_n(\lambda-x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}})}{\partial \lambda} \\ &= (-1)^n (H'_n(\lambda-x) - (\lambda-x)H_n(\lambda-x)) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \\ &= (-1)^n (nH_{n-1}(\lambda-x) - (\lambda-x)H_n(\lambda-x)) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \\ &= (-1)^n \left(-H_{n+1}(\lambda-x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \right) \\ &= (-1)^{n+1} H_{n+1}(\lambda-x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \end{aligned}$$

Récurrence achevée

- (c) Soit $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \max_{t \in [-a, a]} |g_x^{(n)}(t)| &= \max_{t \in [-a, a]} \left| (-1)^n H_n(\lambda-x) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \right| \\ &\leq \max_{t \in [-a, a]} |(-1)^n H_n(\lambda-x)| \max_{t \in [-a, a]} \left| e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \right| \\ &\leq \frac{K^n n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \end{aligned}$$

Où K est une constante, dépendant de $b = -a - x$ et $c = a - x$.

On peut maintenant utiliser les résultats de la première partie :

$$\begin{aligned} g_x(\lambda) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_x^{(n)}(0) \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H_n(-x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H_n(-x) \frac{\lambda^n}{n!} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{\lambda^n}{n!} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

On rappelle que H_n et n ont même parité. D'autre part $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2} + \lambda x - \frac{\lambda^2}{2}}$, donc $e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = g_x(\lambda) e^{\frac{x^2}{2}}$. On tient compte de l'égalité précédente, on obtient

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{\lambda^n}{n!}$$

3. (a) $x \mapsto e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$ et $-\infty$

$$x^2 e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{\infty}{\sim} x^{n+2} e^{x - \frac{x^2}{2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Cela montre que l'intégrale converge en $\pm\infty$, d'après le théorème de comparaison sur les intégrales des fonctions positives et le critère de Riemann ($2 > 1$).

POLYNÔMES DE HERMITE

(b) Soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \exp, H_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx \end{aligned}$$

Les deux fonctions $\exp$ et $x \mapsto \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont leur produit admet des limites nulles en $\pm\infty$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} \right)' dx \\ &= \left[e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n-1)} dx$$

c'est-à-dire $\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_{n-1} \rangle$ et par suite la suite $(\langle \exp, H_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, on calcule donc $\langle \exp, H_{n-1} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \exp, H_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

(c) Dans la formule de la question précédente, pour $\lambda = 1$, $e^{x-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}$, donc

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{e} \frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \frac{H_n(x)}{n!}$$