

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Notations

- Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n .
- Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.
- L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- Les coefficients binomiaux sont notés $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($0 \leq k \leq n$).

Partie I: Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E , on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ .

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \quad \varphi_n(P) = \phi(P)$$

3. Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.
 - (a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3 .
 - (b) Justifier que φ_3 est diagonalisable.
 - (c) Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3 , formée de polynômes unitaires.
4. On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.
 - (a) Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.
 - (b) En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie II: Polynômes de Legendre

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

5. Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .
6. Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer le degré de L_n en fonction de n et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
8. En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n .
9. Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n].$$

10. En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n , puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

11. Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leq \left(\frac{1+|x|}{2} \right)^n C_{2n}^n.$$

12. On définit, pour tout entier naturel n , le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$.

(a) Vérifier que :

$$(X^2 - 1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

(b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n+1)L_n.$$

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Partie III: Définition d'un produit scalaire

On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx.$$

13. Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E .

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

14. (a) Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle \phi(P) | Q \rangle = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P'(x)Q'(x) dx.$$

(b) Que peut-on déduire pour les endomorphismes φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ?

(c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie II, que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

15. Soit n un entier naturel.

(a) Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle Q | L_n \rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] dx.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1} .

(c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

16. (a) À l'aide de (15a), exprimer, pour tout entier naturel n , $\|L_n\|^2$ en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

(d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

17. Donner, pour tout entier naturel n , une base orthonormée de E_n .

Partie IV: Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

18. Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$.

19. En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X).$$

20. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \alpha_k = -(2n+1) \frac{\langle XL_n | L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$.

21. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, vérifier que $\langle XL_n | L_k \rangle = \langle L_n | XL_k \rangle$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.

22. Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.

23. En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1} .

24. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Partie V: Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum_{n \geq 0} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x .

25. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1+|t|}{2}\right)^n C_{2n}^n x^n$.

26. En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum_{n \geq 0} L_n(t)x^n$ est strictement positif.

On donnera une minoration de R_t , mais on ne cherchera pas à le calculer.

On note S_t la somme de cette série entière : $\forall x \in]-R_t, R_t[$, $S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$

27. En utilisant le résultat de la question (24), montrer que S_t est solution sur $]-R_t, R_t[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :

$$(\mathcal{E}_t) \quad (1 - 2tx + x^2)y'(x) + (x - t)y(x) = 0$$

28. Pour $|t| < 1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x .

Partie VI: Projection orthogonale, calcul de distance

29. Calculer, pour tout entier naturel k , l'intégrale

$$J_k = \int_{-1}^1 x^k dx.$$

30. Étant donnés deux entiers naturels n et r , tels que $0 \leq r \leq n$, on note p_r la projection orthogonale de E_n sur son sous-espace vectoriel E_r .

Donner une expression générale de $p_r(P)$ utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme P de E_n .

31. On suppose désormais $n = 3$ et $P = X^3$.

(a) Déterminer $p_0(P)$, $p_1(P)$ et $p_2(P)$.

(b) Calculer les distances $d(P, E_k)$ de P aux sous-espaces vectoriels E_k pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2$.

32. On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.

Montrer l'existence de

$$m = \min_{Q \in G} \int_{-1}^1 (Q(x))^2 dx$$

et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Partie I: Étude d'un endomorphisme

1. P étant un polynôme, P', P'' le sont et donc $\phi(P)$ est un polynôme. Ainsi ϕ est bien défini.
La dérivation étant linéaire, on montrerait que ϕ l'est aussi, ϕ est un endomorphisme de E .
2. Si $\deg P \leq n$, on a $\deg P' \leq n-1$ et $\deg(XP') \leq n$, de même $\deg(X^2-1)P'' \leq 2+n-2 = n$.
Donc $\deg \phi(P) \leq n$. Donc pour tout $P \in E_n$, $\phi(P) \in E_n$.
3. Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.

- (a) $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de E_3 . On a $\varphi_3(1) = \phi(1) = 0$, $\varphi_3(X) = 2X$, $\varphi_3(X^2) = 2(X^2-1) + 4X^2 = 6X^2-2$ et $\varphi_3(X^3) = 6X(X^2-1) + 6X^3 = 12X^3-6X$. Donc la matrice de φ_3 dans la base canonique de E_3 est

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

- (b) M_3 est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Il y a quatre valeurs propres distinctes (0, 2, 6 et 12) et M_3 est carrée d'ordre 4 donc M_3 est diagonalisable. Par conséquent φ_3 est diagonalisable et les quatre sous-espaces propres sont des droites.
- (c) On a vu au a) que 1 est vecteur propre associé à $\lambda = 0$ et que X est vecteur propre associé à $\lambda = 2$.

On résout $(M_3 - 6I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$ ce qui conduit à $t = 0, y = 0$ et $-6x = 2z$ (c'est bien une droite). Avec $z = 1$ on obtient $-\frac{1}{3} + X^2$ est vecteur propre associé à $\lambda = 6$.

De même on trouve que $X^3 - \frac{3}{5}X$ est vecteur propre associé à $\lambda = 12$. Ainsi $(1, X, X^2 - \frac{1}{3}, X^3 - \frac{3}{5}X)$ une base de E_3 diagonalisant φ_3 , formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.

4. On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.

- (a) $\phi(1) = 0$ et $\phi(X) = 2X$. Pour $k \geq 2$, $\phi(X^k) = k(k-1)X^{k-2}(X^2-1) + 2kX^k = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$.

Donc $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & n(n-1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $0, 2, \dots, k(k+1), \dots, (n-1)n$ et $n(n+1)$.

- (b) Les $k(k+1)$ pour $k = 0$ à n sont deux-à-deux distincts donc φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes or $\dim E_n = n+1$ donc φ_n est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.

Partie II: Polynômes de Legendre

5. Après calculs, on trouve : $L_0 = 1$, $L_1 = X$, $L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$ et $L_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.

6. $L_n(1) = \frac{1}{2^n}(0 + C_n^0 1(1+1)^n)$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(1) = 1$.

7. L_n étant une somme de polynômes de degré exactement n , il est de degré au plus n .

Le coefficient de X^n est $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ donc est non nul. Le degré de L_n est n et son coefficient dominant est

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

POLYNÔMES DE LEGENDRE

$$8. L_n(-X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (-1)^{n-k} (X+1)^{n-k} (-1)^k (X-1)^k = (-1)^n \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (X+1)^{n-k} (X-1)^k.$$

Puis en utilisant $\ell = n - k$ et $C_n^k = C_n^{n-k}$ on a :

$$L_n(-X) = (-1)^n \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n (C_n^\ell)^2 (X+1)^\ell (X-1)^{n-\ell} = (-1)^n L_n(X).$$

L_n a la même parité que n .

$$9. \text{ Posons } u(X) = (X-1)^n, v(X) = (X+1)^n \text{ (pour que } u(X)v(X) = (X^2-1)^n).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u^{(k)}(X) = n(n-1) \cdots (n-k+1)(X-1)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k}$ et *idem* pour v donc

$$v^{(n-k)}(X) = \frac{n!}{k!} (X+1)^k. \text{ Donc par la formule de Leibniz :}$$

$$\frac{d^n}{dX^n} [u(X)v(X)] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X+1)^k$$

$$\text{D'où } \frac{d^n}{dX^n} [(X^2-1)^n] = n! \sum_{k=0}^n C_n^{k^2} (X-1)^{n-k} (X+1)^k \text{ puis :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2-1)^n].$$

$$10. (X^2-1)^n = X^{2n} + Q(X) \text{ où } \deg Q < 2n \text{ d'où } \frac{d^n}{dX^n} (X^2-1)^n = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} X^n + Q^{(n)}(X)$$

Le coefficient dominant de L_n est donc $\frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} C_{2n}^n$, d'où avec 7) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

$$11. |(x-1)^{n-k}(x+1)^k| = |x-1|^{n-k} |x+1|^k \leq (1+|x|)^{n-k} (1+|x|)^k = (1+|x|)^n.$$

$$\text{D'où (par l'inégalité triangulaire)} |L_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} (1+|x|)^n \sum_{k=0}^n C_n^{k^2} \text{ puis :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |L_n(x)| \leq \left(\frac{1+|x|}{2} \right)^n C_{2n}^n.$$

$$12. \text{ (a) } U_n(X) = (X^2-1)^n \text{ donc } U_n'(X) = 2X(X^2-1)^{n-1} \text{ (au moins pour } n \geq 1 \dots) \text{ puis :}$$

$$(X^2-1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$

(b) En dérivant $n+1$ fois $XU_n(X)$ par la formule de Leibniz, on obtient :

$$\begin{aligned} (XU_n)^{(n+1)} &= XU_n^{(n+1)} + C_{n+1}^1 U_n^{(n)} \\ &= X \left(U_n^{(n)} \right)' + (n+1)U_n^{(n)} \\ &= 2^n n! (XL_n' + (n+1)L_n) \end{aligned}$$

De même en dérivant $n+1$ fois $(X^2-1)U_n'(X)$, on obtient :

$$\begin{aligned} ((X^2-1)U_n')^{(n+1)} &= (X^2-1)(U_n')^{(n+1)} + C_{n+1}^1 (X^2-1)' (U_n')^{(n)} + C_{n+1}^2 (X^2-1)'' (U_n')^{(n-1)} \\ &= (X^2-1) \left[(U_n')^{(n)} \right]' + 2(n+1)X \left(U_n^{(n)} \right)' + n(n+1)U_n^{(n)} \\ &= 2^n n! [(X^2-1)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n] \end{aligned}$$

Donc

$$(X^2-1)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n = 2nXL_n' + 2n(n+1)L_n$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' = n(n+1)L_n.$$

Partie III: Définition d'un produit scalaire

13. On reconnaît le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ qui contient le sous-espace des fonctions polynomiales.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

Si le sujet n'identifiait pas les polynômes formels et les fonctions polynomiales, j'aurais ajouté :

Si $(P|P) = 0$ alors la fonction $\tilde{P}$ est nulle sur $[-1, 1]$ donc le polynôme P a une infinité de racines, P est bien le polynôme nul.

On a ainsi défini un produit scalaire sur E (donc sur les E_n aussi).

14. (a) On remarque que $\phi(P)(x) = \frac{d}{dx}((x^2 - 1)P'(x))$ et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \langle \phi(P) | Q \rangle &= \int_{-1}^1 [(1 - x^2)P''(x) + 2xP'(x)] \cdot Q(x) dx \\ &= [(1 - x^2)P'(x)Q'(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)P'(x)Q'(x) dx \end{aligned}$$

$$\forall (P, Q) \in E^2, (\phi(P)|Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P'(x)Q'(x) dx.$$

- (b) On a donc $(\phi(P)|Q) = (P|\phi(Q))$, les endomorphismes φ_n sont donc symétriques

- (c) Soit p, q deux naturels distincts. Les polynômes L_p et L_q sont deux vecteurs propres de φ_n (où $n = \max(p, q)$) associés à des valeurs propres distinctes.

Or les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont en somme directe **orthogonale** donc L_p et L_q sont orthogonaux.

Remarque : On aurait pu reproduire la démonstration du cours à savoir :

De $\phi(L_p) = p(p+1)L_p$ on a $(\phi(L_p)|L_q) = p(p+1)(L_p|L_q)$.

D'autre part $p(p+1)(L_p|L_q) = (\phi(L_p)|L_q) = (L_p|\phi(L_q)) = q(q+1)(L_p|L_q)$

puis de $p(p+1) \neq q(q+1)$, on a $(L_p|L_q) = 0$.

Les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

15. Soit n un entier naturel.

- (a) Le résultat est vrai pour $k = 0$ cf. 9). Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On suppose que

$$(Q|L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] dx.$$

On a alors en intégrant par parties :

$$\frac{(-1)^k}{2^n n!} \left[\frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} [(x^2 - 1)^n] \right]_{-1}^1 - \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} [Q(x)] \frac{d^{n-(k+1)}}{dx^{n-(k+1)}} [(x^2 - 1)^n] dx$$

Or 1 et -1 sont des racines d'ordre n de U_n . Donc les dérivées successives de U_n jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles en 1 et en -1. Or $n - (k+1)$ est un entier compris entre 0 et $n-1$ donc le crochet est nul et on a la relation à l'ordre $k+1$.

On a prouvé par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (Q|L_n) = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] dx.$$

- (b) En particulier pour $k = n$: $(Q|L_n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} [Q(x)] (x^2 - 1)^n dx$.

Or si $Q \in E_{n-1}$ alors $Q^{(n)} = 0$ donc $(Q|L_n) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1} .

- (c) Si $p \neq q$. On peut supposer par exemple que $p < q$.

Alors L_p (qui est de degré p) appartient à E_{q-1} donc L_q est orthogonal à L_p .

16. (a) $\|L_n\|^2 = (L_n|L_n) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} [L_n(x)] (x^2 - 1)^n dx$.

Or $L_n^{(n)}$ est une constante ($\deg L_n = n$) et d'après le coefficient dominant de L_n trouvé en 10) on a $L_n^{(n)} = n! \cdot \frac{1}{2^n} C_{2n}^n$

D'où en posant $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$: $\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^n n!} n! \cdot \frac{1}{2^n} C_{2n}^n I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^n I_n$

POLYNÔMES DE LEGENDRE

$$(b) \quad I_{n+1} = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{n+1} dx = [(x^2 - 1)^{n+1} \cdot x]_{-1}^1 - 2(n+1) \int_{-1}^1 x(x^2 - 1)^n \cdot x dx$$

Le crochet est nul et $x^2 = x^2 - 1 + 1$ donc $I_{n+1} = -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n$ d'où

(c) Classiquement (produit des nombres pairs/impairs)... on trouve avec $I_0 = 2$:

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_n = (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$(d) \quad \|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^n n!} n! \cdot \frac{1}{2^n} C_{2n}^n I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^n I_n = \frac{2}{2n+1} \text{ donc } \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

$$17. \quad \left(\sqrt{\frac{1}{2}} L_0, \sqrt{\frac{3}{2}} L_1, \sqrt{\frac{5}{2}} L_2, \dots, \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n \right) \text{ est une base orthonormée de } E_n.$$

Partie IV: Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

18. D'après les coefficients dominants, le coefficient cherché est

$$(n+1) \frac{1}{2^{n+1}} C_{2n+2}^{n+1} - (2n+1) \frac{1}{2^n} C_{2n}^n = C_{2n}^n \frac{1}{2^{n+1}} \left[(n+1) \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} - 2(2n+1) \right] = 0.$$

Le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$ est nul.

19. $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$ est donc de degré au plus n et $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de E_n d'où l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X).$$

20. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En faisant le produit scalaire de la relation précédente par L_k on obtient :

$$0 - (2n+1)\langle XL_n(X) | L_k \rangle = 0 + \alpha_k \|L_k\|^2 \text{ d'où } \alpha_k = -(2n+1) \frac{\langle XL_n | L_k \rangle}{\|L_k\|^2}.$$

$$21. \quad \langle XL_n | L_k \rangle = \int_{-1}^1 x L_n(x) L_k(x) dx = \langle L_n | XL_k \rangle.$$

Puis si $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, XL_k est de degré $< n$ donc est orthogonal à L_n d'où $\langle XL_n | L_k \rangle = \langle L_n | XL_k \rangle = 0$ donc $\alpha_k = 0$.

$$22. \quad \langle XL_n | L_n \rangle = \int_{-1}^1 x L_n(x) L_n(x) dx. \text{ C'est l'intégrale d'une fonction impaire sur } [-1, 1] \text{ donc } \langle XL_n | L_n \rangle = 0 \text{ puis } \alpha_n = 0.$$

$$23. \quad \text{Il reste } (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \alpha_{n-1}L_{n-1}(X).$$

Or d'après 6) : $L_n(1) = 1$, de $(n+1)L_{n+1}(1) - (2n+1)L_n(1) = \alpha_{n-1}L_{n-1}(1)$,

on a : $\alpha_{n-1} = -n$.

$$24. \quad \text{Donc pour } n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0.$$

Partie V: Fonction génératrice

$$25. \quad \text{Soit } \rho > 0. \text{ On pose } u_n = \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^n C_{2n}^n \rho^n. \text{ On a } u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+|t|}{2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \rho \rightarrow_n 2\rho(1+|t|).$$

Donc si $\rho < \frac{1}{2(1+|t|)}$ la série $\sum u_n$ converge et si $\rho > \frac{1}{2(1+|t|)}$ la série $\sum u_n$ diverge.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^n C_{2n}^n x^n$ est $R = \frac{1}{2(1+|t|)} > 0$.

$$26. \quad \text{On a d'après la question 11, } |L_n(t)x^n| \leq \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^n C_{2n}^n |x|^n. \text{ Pour } |x| < R, \text{ la convergence de la série } \sum \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^n C_{2n}^n |x|^n \text{ donne que } \sum L_n(t)x^n \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

Le rayon de convergence R_t de $\sum_{n \in \mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est supérieur à $R = \frac{1}{2(1+|t|)}$ donc strictement positif.

POLYNÔMES DE LEGENDRE

$$27. S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n, xS_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^{n+1} = S_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(t)x^n.$$

$$S'_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(t)nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_{n+1}(t)(n+1)x^n; xS'_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)nx^n; \text{ et}$$

$$x^2S'_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(t)(n-1)x^n. \text{ D'où}$$

$$(1-2tx+x^2)S'_t(x) + (x-t)S_t(x) = L_1(t) - tL_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1)tL_n(t) + nL_{n-1}(t)]x^n$$

Or d'après 23 $(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1)tL_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0$ et $L_1(t) - tL_0(t) = t - t \cdot 1 = 0$

donc S_t est solution sur $] -R_t, R_t[$ de $(\mathcal{E}_t)$ $(1-2tx+x^2)y'(x) + (x-t)y(x) = 0$

$$28. D(x) = 1 - 2tx + x^2 = (x-t)^2 + 1 - t^2 > 0 \text{ car } |t| < 1, \text{ et } F(x) = -\frac{(x-t)}{(1-2tx+x^2)} = -\frac{1}{2} \frac{D'(x)}{D(x)} \text{ admet donc}$$

comme primitive par exemple $x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(D(x)) + 0$.

Les solutions de $(\mathcal{E}_t)$ sont de la forme $y : x \mapsto \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ où λ est une constante. Plus précisément $\lambda = y(0)$. Or $S_t(0) = L_0(t) = 1$.

$$\text{Pour } x \in] -R_t, R_t[, S_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}.$$

Partie VI: Projection orthogonale, calcul de distance

$$29. \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N}, J_k = \int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} [1 - (-1)^{k+1}]. J_{2n} = \frac{2}{2n+1}, J_{2n+1} = 0.$$

$$30. (L_0, L_1, \dots, L_r) \text{ étant une base orthogonale de } E_r, \text{ on sait que : } p_r(P) = \sum_{k=0}^r \frac{(L_k|P)}{\|L_k\|^2} L_k = \sum_{k=0}^r \frac{2k+1}{2} (L_k|P) L_k.$$

31. On suppose désormais $n = 3$ et $P = X^3$.

$$(a) (L_0|P) = \int_{-1}^1 x^3 dx = J_3 = 0 \quad \text{donc } p_0(P) = 0$$

$$(L_1|P) = \int_{-1}^1 x^4 dx = J_4 = \frac{2}{5} \quad \text{donc } p_1(P) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} L_1 = \frac{3}{5} X$$

$$(L_2|P) = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) x^3 dx = \frac{3}{2} J_5 - \frac{1}{2} J_3 = 0 \quad \text{donc } p_2(P) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} L_1 = \frac{3}{5} X$$

(b) On sait que $d(P, E_k) = \|P - p_k(P)\| = \sqrt{\|P\|^2 - \|p_k(P)\|^2}$ (Pythagore).

$$\text{Or } \|P\|^2 = J_6 = \frac{2}{7} \text{ et } p_0(P) = 0 \text{ donc } d(P, E_0) = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\|p_1(P)\|^2 = \frac{9}{25} J_2 = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{25} \text{ et } \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175} \quad d(P, E_1) = d(P, E_2) = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{7}}$$

32. Soit $Q \in G$. On peut écrire Q sous la forme $Q = X^3 - T(X)$ où T est un polynôme de E_2 .

Et réciproquement si $T \in E_2$ alors $X^3 - T(X) \in G$.

$$\text{On a ainsi } \int_{-1}^1 (Q(x))^2 dx = \|P - T\|^2.$$

Or on sait que $T \mapsto \|P - T\|$ admet un minimum sur E_2 atteint uniquement en $T = p_2(P)$.

D'où l'existence du minimum m et il est atteint pour $Q = P - p_2(P)$ uniquement.

De plus

$$m = \frac{8}{175}$$