

THÉORÈMES DE STONE WEIERSTRASS

Définitions et notations

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace des fonctions continues sur $[0, 1]$;
- Pour tout élément f de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, la norme uniforme notée $\| \cdot \|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.
- On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ constitué des fonctions polynômiales.
- $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques.
- Pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, la norme uniforme notée $\| \cdot \|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se note $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n : t \mapsto e^{int}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \cos(nt) \end{cases}$ et $s_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \sin(nt) \end{cases}$
- La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ engendre un sous-espace vectoriel T de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dont les éléments sont appelés **polynômes trigonométriques**
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \mathbf{Vect}(e_k, -n \leq k \leq n) = \mathbf{Vect}(c_k, s_k, 0 \leq k \leq n)$

Partie I: Les théorèmes de Stone Weierstrass

1. Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_n(t) = a_n \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2n}$, le réel a_n étant tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1$.
 - (a) Montrer que φ_n est un élément de T_n .
 - (b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geq 1 - \sin u$. En déduire que, pour tout entier n , $\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} du \geq \frac{1}{n+1}$, puis que $a_n \leq \frac{n+1}{4}$.
 - (c) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t) = 0$.
2. Soit g un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) g(u-t) dt.$$

- (a) Établir la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t) g(t) dt.$$

En déduire que Q_n appartient à T_n .

- (b) Soit toujours δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer l'inégalité :

$$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t).$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$. Conclure
- (d) On suppose g est paire. Montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n , tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.
Indication : On prolongera f en une fonction paire, notée $\tilde{f}$, et on introduira $g(u) = \tilde{f}(\cos u)$.
4. **Théorème des moments :** Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

Montrer que f est nulle

THÉORÈMES DE STONE WEIERSTRASS

Partie II: Base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ de produit scalaire est défini par : $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$.

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|_2$.

5. Montrer que T est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$

6. Montrer que

$$(a) \text{ Pour tous } m, n \in \mathbb{N}, \langle c_n, c_m \rangle = \begin{cases} \delta_{m,n} & \text{si } (m, n) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

$$(b) \text{ Pour tous } m, n \in \mathbb{N}^*, \langle s_n, s_m \rangle = \delta_{m,n}$$

$$(c) \text{ Pour tous } (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \langle c_m, s_n \rangle = 0$$

7. Dédurre que la famille $\left\{ \frac{c_0}{\sqrt{2}}, c_n, s_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une base hilbertienne

8. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \langle f, c_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \langle f, s_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

(b) Montrer, en utilisant l'égalité de Parseval, que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

9. **Exemple :** Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

$$(a) \text{ Montrer que } \forall x \in [-\pi, \pi], x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$(b) \text{ Dédurre la somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(c) \text{ En utilisant l'égalité de Parseval, déduire } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$



Non disponible

THÉORÈMES DE STONE WEIERSTRASS