

FONCTION DE BLANCMANGE

L'objectif du problème est de construire une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point et monotone sur aucun intervalle $]a, b[$ non vide.

Partie I: Étude de g et de g_n

On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $g : x \mapsto d(x, \mathbb{Z}) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{g(2^n x)}{2^n}$.

1. Justifier l'existence de g .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'un entier n tel que $g(x) = |x - n|$. Exprimer n en fonction de x et de la fonction partie entière.
3. Montrer que g est 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et que $g(1 - x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer la courbe représentative de g .
4. Vérifier que g est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
5. Quelle transformation géométrique simple envoie le graphe de g sur celui de g_n ? Justifier. Tracer les courbes représentatives de g_1 et g_2 sur le même graphique que celui de g .
6. Montrer que g_n est 1-lipschitzienne. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_n est affine sur $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$. Quelles valeurs peut prendre la pente?

Partie II: Construction de f

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente. On note $f(x)$ sa limite.
8. Montrer que f est 1-périodique et que pour tout réel x , $f(x) = f(1 - x)$.
9. Montrer que $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire que si $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{n+3}{2^n}$.
10. Prouver que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Partie III: La fonction f n'est dérivable en aucun point

Dans cette question, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et on souhaite montrer que f n'est pas dérivable en x . On définit

$$a_n = \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \text{ et } b_n = \frac{E(2^{n+1}x) + 1}{2^{n+1}}.$$

11. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune?
12. Vérifier que $f(a_n) = f_n(a_n)$ et $f(b_n) = f_n(b_n)$.
13. Justifier que $\frac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n}$.
14. On pose $\Delta_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$. Vérifier que $|\Delta_{n+1} - \Delta_n| = 1$.
15. On suppose que u_n et v_n sont deux suites tendant vers une même limite ℓ , et λ_n une suite quelconque à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que $\lambda_n u_n + (1 - \lambda_n) v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
16. On suppose que f est dérivable en x . Montrer qu'alors $\Delta_n \rightarrow f'(x)$. Conclure.

Partie IV: La fonction f n'est monotone sur aucun intervalle

17. On fixe $x = \frac{k}{2^n}$, puis $x_p = x + \frac{1}{2^p}$. Montrer qu'il existe un rang P tel que si $p \geq P$, alors $f(x_p) > f(x)$.
18. En déduire que f n'est monotone sur aucun intervalle contenant au moins deux points.

FONCTION DE BLANCMANGE

Partie I: Étude de g et de g_n

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{|x - k|/k \in \mathbb{Z}\}$ est non vide et minoré par 0, d'où l'existence de sa borne inférieure.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que l'ensemble $\{|x - k|/k \in \mathbb{Z}\}$ admet un minimum atteint en $E(x + \frac{1}{2})$. On distingue deux cas.

Si $x - 1/2$ est un entier. Alors l'intervalle ouvert $]x - 1/2, x + 1/2[$ ne contient pas d'entier, et donc $|x - k| \geq 1/2$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. De plus, $n = x - 1/2$ appartient à $\mathbb{Z}$ et donc $g(x) \geq |x - n| = 1/2$. Ainsi, $g(x) = 1/2$. De plus, $n = E(x + \frac{1}{2})$.

Si $x - 1/2$ n'est pas un entier. Alors l'intervalle $]x - 1/2, x + 1/2[$ contient un unique entier n (car $x \pm 1/2 \notin \mathbb{Z}$), et ainsi $g(x) = |n - x| < 1/2$ car si $k \notin]x - 1/2, x + 1/2[$, alors $|x - k| \geq 1/2$. De $x - 1/2 < n < x + 1/2$, on tire $n < x + 1/2 < n + 1$, et donc $n = E(x + 1/2)$.

3. La fonction g est 1-périodique car

$$g(x) = \inf_{k-1 \in \mathbb{Z}} |x - k| = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k + 1| = g(x + 1).$$

La fonction g est continue : $x \mapsto E(x + \frac{1}{2})$ est continue en tout $x \notin 1/2 + \mathbb{Z}$, et donc g aussi par composition. De plus pour tout $x \in [0, 1/2]$, $g(x) = x$ et pour tout $x \in [1/2, 1]$, $g(x) = 1 - x$. Donc $\lim_{1/2-} g = \frac{1}{2} = \lim_{1/2+} g$. Donc g est continue en $1/2$ et donc sur tout $\mathbb{R}$ par périodicité.

Si $x \in [0, 1/2]$, $g(x) = x$ et $1 - x \in [1/2, 1]$, d'où $g(1 - x) = 1 - (1 - x) = x = g(x)$. Si $x \in [1/2, 1]$, $g(x) = 1 - x$ et $x \in [0, 1/2]$, d'où $g(1 - x) = 1 - x = g(x)$. Si maintenant $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x - E(x)) = g(1 - (x - E(x))) = g(1 - x)$ car $x - E(x) \in [0, 1]$ et que g est 1-périodique.

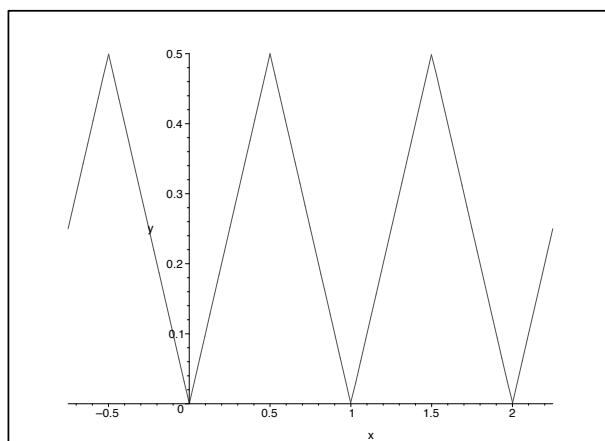


FIGURE 1 – La courbe représentative de g

4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, g est 1-lipschitzienne sur $[n, n + 1/2]$ et $[n - 1/2, n]$ car g y est affine de pente 1. Mais si g est 1-lipschitzienne sur $[a, b]$ et $[b, c]$ alors elle est 1-lipschitzienne sur $[a, c]$: en effet, pour $x, y \in [a, b]$ ou $[b, c]$, on aura bien $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$, et si $a \leq x < b < y < c$, on a

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(b)| + |g(b) - g(y)| \leq (b - x) + (y - b) = |y - x|.$$

5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives respectives de g et g_n . On a par définition $(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y = g(x)$ et $(x, y) \in \mathcal{C}_n \Leftrightarrow y = g(2^n x)/2^n \Leftrightarrow 2^n y = g(2^n x) \Leftrightarrow 2^n(x, y) \in \mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}_n$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de rapport $1/2^n$.
6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $|g_n(x) - g_n(y)| = \frac{1}{2^n} |g(2^n x) - g(2^n y)| \leq \frac{1}{2^n} |2^n x - 2^n y| = |x - y|$.
Pour tous $x, y \in [\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}]$, $2^n x$ et $2^n y$ appartiennent simultanément à $[0, 1/2]$ ou $[1/2, 1]$ selon que k est pair ou impair respectivement. D'où $g_n(x) - g_n(y) = \frac{1}{2^n} (g(2^n x) - g(2^n y)) = x - y$ si k est pair et $g_n(x) - g_n(y) = \frac{1}{2^n} (g(2^n x) - g(2^n y)) = \frac{1}{2^n} (1 - 2^n x - (1 - 2^n y)) = y - x$ si k est impair. Donc g_n est affine de pente ± 1 .

Partie II: Construction de f

7. La suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante car $g_n(x) \geq 0$. Il suffit donc de montrer que la suite $(\sum_{k=0}^n g_k(x))_n$ est bornée. Or $|g_k(x)| = g_k(x) \leq 1/2$. D'où $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 1$ (somme des termes d'une suite géométrique).

FONCTION DE BLANCMANGE

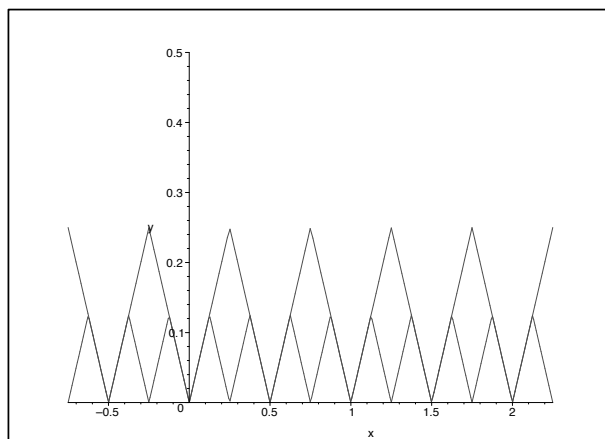


FIGURE 2 – Les courbes représentatives de g_1 et g_2

8. g_k est 1-périodique car $g(2^k(x+1)) = g(2^kx + 2^k) = g(2^kx)$. D'où f_n aussi et f aussi par passage à la limite.
De plus, $g_k(1-x) = \frac{1}{2^k}g(2^k(1-x)) = \frac{1}{2^k}g(2^k - 2^kx) = \frac{1}{2^k}g(1 - 2^kx) = \frac{1}{2^k}g(2^kx)$. Donc par passage à la limite, $f(1-x) = f(x)$.
9. Pour tout $p \geq n$, on a

$$|f_p(x) - f_n(x)| = f_p(x) - f_n(x) = \sum_{k=n}^p \frac{1}{2^k} g(2^k x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$. On a alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{n+1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{n+3}{2^n}$ car $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sum_{k=0}^n |g_n(x) - g_n(y)| \leq \sum_{k=0}^n |x - y| \leq \frac{n+1}{2^n}$ car g_n est 1-lipschitzienne.

10. Soit $\varepsilon > 0$. Par croissance comparée, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{n+3}{2^n} \leq \varepsilon$. Soit alors $\eta = \frac{1}{2^n}$. D'après la question précédente, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

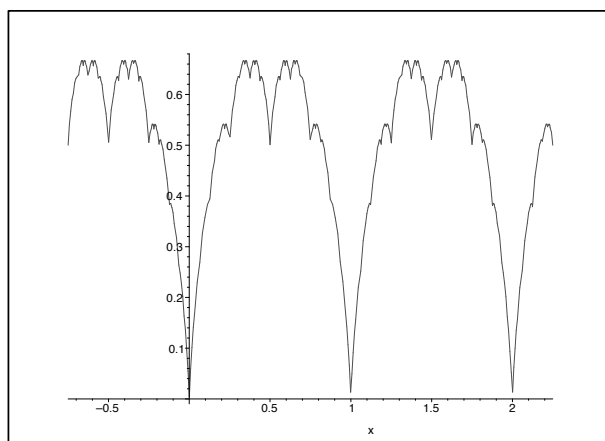


FIGURE 3 – La courbe représentative de la fonction de Blancmange f sur $[0, 1]$

Partie III: La fonction f n'est dérivable en aucun point

11. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par définition, on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $E(y) \leq y < E(y) + 1$. D'où

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$$

Or

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x + y) + 1$$

FONCTION DE BLANCMANGE

et donc $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$ car $E(x+y)$ est un entier. De plus

$$E(x+y) \leq x+y < E(x) + E(y) + 2,$$

et donc $E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$ car $E(x) + E(y) + 2$ est un entier. On a montré

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

Montrons maintenant que le couple de suites $((a_n)_n, (b_n)_n)$ est un couple de suites adjacentes.

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{2^{n+1}} (E(2^{n+1}x) - 2E(2^n x)) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (E(2^n x + 2^n x) - E(2^n x) - E(2^n x)) \geq 0 \end{aligned}$$

comme on vient de le montrer. De même,

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{2^{n+1}} (E(2^{n+1}x) + 1 - 2(E(2^n x) + 1)) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (E(2^n x + 2^n x) - E(2^n x) - E(2^n x) - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

Enfin $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc tend vers 0.

Puisque $E(2^{n+1}x) \leq 2^{n+1}x < E(2^{n+1}x) + 1$, on a $a_n \leq x < b_n$. En passant à la limite, on a $\lim a_n = \lim b_n = x$.

12. Pour tout entier $p > n$, on a $g_p(a_n) = \frac{1}{2^p} g\left(\frac{2^p}{2^{n+1}} E(2^{n+1}x)\right) = 0$ car $\frac{2^p}{2^{n+1}} E(2^{n+1}x)$ est un entier et que g s'annule sur $\mathbb{Z}$.
13. D'après 1.d, pour tout k compris entre 0 et n , g_k est affine sur $[a_k, b_k]$. Comme les segments $[a_k, b_k]$ sont emboîtés, g_k est affine sur $[a_n, b_n]$, et donc aussi sur $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Donc $f_n = \sum_{k=0}^n g_k$ est aussi affine sur $[a_n, b_n]$. Donc les taux d'accroissements $\frac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}}$ et $\frac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n}$ sont égaux.
14. En posant $k = E(2^{n+2}x)$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} - \Delta_n &= \frac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n} \\ &= \frac{f_{n+1}(b_{n+1}) - f_{n+1}(a_{n+1}) - f_n(b_{n+1}) + f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \\ &= \frac{g_{n+1}(b_{n+1}) - g_{n+1}(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \\ &= 2^{n+2} \frac{1}{2^{n+2}} \left(g\left(\frac{2^{n+1}k + 2^{n+1}}{2^{n+2}}\right) - g\left(\frac{2^{n+1}k}{2^{n+2}}\right) \right) \\ &= g\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

Si k est pair, $\Delta_{n+1} - \Delta_n = 1$ et si k est impair, $\Delta_{n+1} - \Delta_n = -1$.

15. $\lambda_n u_n + (1 - \lambda_n)v_n = v_n + \lambda_n(u_n - v_n)$. Comme $(\lambda_n)_n$ est bornée, $\lim v_n + \lambda_n(u_n - v_n) = l$.
16. Soient $u_n = \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x}$, $v_n = \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n}$ et $\lambda_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n}$. En particulier $\lim u_n = \lim v_n = f'(x)$. On a alors

$$\Delta_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} = \lambda_n u_n + (1 - \lambda_n)v_n$$

qui tend vers $f'(x)$ d'après la question précédente.

On en conclut que f n'est pas dérivable par l'absurde : sinon on aurait $1 = \lim |\Delta_{n+1} - \Delta_n| = |f'(x) - f'(x)| = 0$, contradiction.

Partie IV: La fonction f n'est monotone sur aucun intervalle

17. Comme on l'a vu plus haut, g_k est affine sur $[x, x_p]$ dès que $k \geq p$. Donc pour $p \geq 2n$, f_p restreinte à $[x, x_p]$ est une somme $\sum_{k=0}^{n-1} g_k + \sum_{k=n}^p g_k$ où la première somme est une somme de fonctions affines de pentes ± 1 et la seconde de pentes 1. Donc f_p a une pente > 0 pour tout $p \geq 2n = P$. Donc $f(x_p) = f_p(x_p) > f_p(x) = f(x)$.
18. Par densité des points de la forme $k/2^n$ dans $\mathbb{R}$, f n'est décroissante sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$. Mais comme $f(x) = f(1-x)$, f n'est croissante sur aucun intervalle non plus.