

FONCTIONS CONTINUES ET LIPSCHITZIENNES. DENSITÉ

Partie I: Normes sur un espace de fonctions continues

On pose $I = [0, 1]$ et C_0 le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de normes de convergence uniforme.

Soit $u \in C_0$ on pose $A = u^{-1}(\{0\})$. Pour tout $f \in C_0$, on pose $N_u(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)u(t)|$

1. Montrer que N_u est une norme sur C_0 si, et seulement, si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
Dans la suite de cette partie, on suppose que A est d'intérieur vide et que $A \subset]0, 1[$
2. L'application identique: $(C_0, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C_0, N_u)$, $f \mapsto f$ est-elle continue?
3. Si $A = \emptyset$, montrer que les normes N_u et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur C_0 .
4. On suppose que $A \neq \emptyset$ et soit $t_0 \in A$. On pose n_0 la partie entière de $\frac{1}{1-t_0}$. Pour chaque $n \geq n_0$, on définit la fonction f_n : nulle sur $\left[0, t_0 - \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[t_0 + \frac{1}{n}, 1\right]$, affine sur $\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0\right]$ et sur $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{n}\right]$, et telle que $f(t_0) = 1$
 - (a) Représenter graphiquement cette fonction, vérifier que $f_n \in C_0$ et préciser la valeur de $\|f_n\|_\infty$
 - (b) Étudier la suite $(N_u(f_n))_{n \geq n_0}$ et dire si les normes N_u et $\|\cdot\|_\infty$ sont ou non équivalentes sur C_0

Partie II: Normes sur un espace de fonctions lipschitziennes

5. On désigne par L le sous-espace vectoriel de C_0 constitué des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$
 - (a) Si $f \in L$, montrer que l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$$

a un plus petit élément que l'on notera $K(f)$

- (b) Montrer que $K(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in [0,1]^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$
 - (c) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - x^2$. Vérifier que $f \in L$ et calculer $K(f)$, existe-t-il $(x, y) \in [0, 1]^2$ tel que $x > y$ et que $|f(x) - f(y)| = K(f)|x - y|$
6.
 - (a) L'application $f \mapsto K(f)$ définit-elle une norme sur L ?
 - (b) Pour tout $f \in L$, on pose: $N(f) = K(f) + \|f\|_\infty$. Montrer que l'on définit une norme sur L
 7. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Représenter graphiquement cette fonction, vérifier que $f_n \in L$ et préciser la valeur de $N(f_n)$
- (b) Dans l'espace L , les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes?

Partie III: Sous-espaces remarquables

Pour tout réel $k \geq 0$, on note L_k l'espace des applications k -lipschitziennes sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $D_k = L_k \cap \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

8. (a) Montrer que $f \in D_k$ si, et seulement, si $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|f'\|_\infty \leq k$. A-t-on $D_k = L_k$?
- (b) L'ensemble L_k est-il fermé dans C_0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
- (c) L'ensemble L_k est-il fermé dans L muni de la norme N ?
9. (a) Pour toute application $f \in L_k$, soit l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(0) & \text{si } x < 0 \\ f(1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que $\tilde{f}$ est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \tilde{f}(t) dt$.

Montrer que l'on définit ainsi une application $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui est k -lipschitzienne

10. (a) Soit g_n la restriction de f_n à $[0, 1]$, montrer que la suite (g_n) est convergente dans $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ et déterminer sa limite
- (b) Quelle est l'adhérence de D_k dans $(L_k, \|\cdot\|_\infty)$

FONCTIONS CONTINUES ET LIPSCHITZIENNES. DENSITÉ

Partie I: Normes sur un espace de fonctions continues

1. La positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Si $N_u(f) = 0$ alors $u(t)f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in B = I \setminus A$, et puisque f est continue, on en déduit $f(t) = 0$ pour tout $t \in \bar{B}$. L'application N_u est une norme sur $\mathcal{C}_0$ si, et seulement si, $\bar{B} = [0, 1]$, soit si, et seulement si, $A = \emptyset$.
2. Soit $M = \|u\|_\infty$. On a pour tout $t \in I$: $|u(t)f(t)| = |u(t)||f(t)| \leq M \|f\|_\infty$, d'où: $N_u(f) = \|uf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$, et l'application identique $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}_0, N_u)$, $f \mapsto f$ est continue.
3. La fonction $t \mapsto |u(t)|$, continue sur le compact I , est bornée et atteint ses bornes: en particulier, il existe $t_1 \in I$ tel que: $\forall t \in I, |u(t)| \geq |u(t_1)| = m$. Si $A = \emptyset$, la fonction u ne s'annule pas sur I , d'où $m > 0$. On a pour tout $t \in I$:

$$N_u(f) \geq |u(t)f(t)| = |u(t)||f(t)| \geq m|f(t)|$$

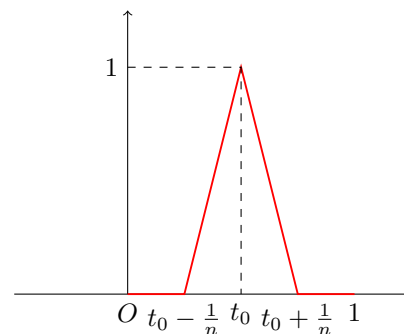
D'où: $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{m} N_u(f)$, ce qui, avec la question précédente, prouve que les normes N_u et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathcal{C}_0$.

4. On suppose que $A \neq \emptyset$ et soit $t_0 \in A$. On pose n_0 la partie entière de $\frac{1}{1-t_0}$.

Pour chaque $n \geq n_0$, on définit la fonction f_n : nulle sur $\left[0, t_0 - \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[t_0 + \frac{1}{n}, 1\right]$, affine sur $\left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0\right]$ et sur $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{n}\right]$, et telle que $f(t_0) = 1$

(a) La fonction f_n est affine par morceaux et continue sur I . En particulier, on a $f_n \in \mathcal{C}_0$. De plus, $\|f_n\|_\infty = 1$.

(b) La fonction u est continue au point t_0 . Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $|t - t_0| \leq \alpha$ donne: $|u(t)| < \varepsilon$. Prenons $n_1 \geq \frac{1}{\alpha}$ et $n \geq n_1$ d'où $\frac{1}{n} \leq \alpha$. Alors, si $t \in \left[t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right]$, on a: $|u(t)f(t)| < \varepsilon$. Pour les autres valeurs de $t \in I$, on a: $|u(t)f(t)| = 0$, et par suite $N_u(f_n) < \varepsilon$. On a ainsi montré que $N_u(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors que $\|f_n\|_\infty = 1$. Les normes N_u et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas donc équivalentes sur $\mathcal{C}_0$.



Partie II: Normes sur un espace de fonctions lipschitziennes

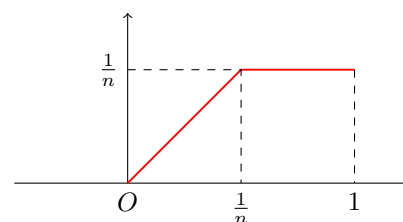
5. (a) Si $f \in L$, alors l'ensemble $\mathcal{R} = \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \mid x, y \in I, x \neq y \right\}$ est majoré et non vide par définition de L .
- (b) Le réel $K(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in [0,1]^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ vérifie: $\forall x \in I, \forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K(f)|x - y|$. Pour tout $k \geq K(f)$ on a encore: $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, mais ceci n'est plus vrai si $k < K(f)$, sans quoi $K(f)$ ne serait pas le plus petit majorant de $\mathcal{R}$. Ceci revient à affirmer que $K(f)$ est le plus petit élément de l'ensemble $\{k \in \mathbb{R}, \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$.
- (c) Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - x^2$. Alors $f'(x) = 2 - 2x$, et $K(f) = 2$. Si $0 \leq y < x \leq 1$, alors $x - y > 0$ et $0 < x + y < 2$. De plus: $f(x) - f(y) = (x - y)(2 - x - y)$. Il en résulte: $0 < f(x) - f(y) < 2(x - y)$. Il n'existe donc pas $x \in I$ et $y \in I$ tel que $x > y$ et que $|f(x) - f(y)| = 2|x - y|$.
6. (a) $K(f) = 0$ si, et seulement si, f est constante, donc K n'est pas une norme.
- (b) La positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Et aussi $\|f\|_\infty \leq N(f)$. Si $N(f) = 0$, alors $\|f\|_\infty = 0$, d'où $f = 0$. Donc, N est une norme sur L .
7. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

FONCTIONS CONTINUES ET LIPSCHITZIENNES. DENSITÉ

- (a) Soit $x, y \in [0, 1]$. Si $x, y \leq \frac{1}{n}$, alors $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Si $x, y \geq \frac{1}{n}$, alors $|f(x) - f(y)| = 0$. Si $x \leq \frac{1}{n} \leq y$, alors

$$|f(y) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} - x \right| \leq |y - x|$$



Ceci montre que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ avec égalité si $x, y \leq \frac{1}{n}$.

Autrement $f_n \in L$ et $K(f_n) = 1$. En outre $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc

$$N(f_n) = 1 + \frac{1}{n}$$

- (b) On a $\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Partie III: Sous-espaces remarquables

8. (a) • Si $f \in D_k$, alors pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ tels que $x \neq y$, on a $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$. Si $a \in I$, il en résulte: $|f'(a)| = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \left| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \right| \leq k$.

• Réciproquement, si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et si $\|f'\|_\infty \leq k$, alors le théorème des accroissements finis nous assure que $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$ pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ tels que $x \neq y$ et $f \in L_k$

• On n'a pas $D_k = L_k$ car il existe des fonctions lipschitziennes non dérivables, comme par exemple les fonctions f_n de la question 7a. Donc $\|f'\|_\infty \leq k$, et bien sûr $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Montrer que $f \in D_k$ si, et seulement, si $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\|f'\|_\infty \leq k$. A-t-on $D_k = L_k$?

- (b) Soit (f_n) une suite de fonctions k -lipschitziennes qui converge dans $\mathcal{C}_0$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers $f \in \mathcal{C}$. Cela signifie que (f_n) converge uniformément, donc simplement vers f sur I . Pour chaque $x \in I$ et chaque $y \in I$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = f(y)$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_n(y)| = |f(x) - f(y)|$. Le passage à la limite des inégalités larges implique que f est k -lipschitzienne, et que L_k est fermé dans $\mathcal{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- (c) Soit (f_n) une suite de fonctions k -lipschitziennes qui converge dans L muni de la norme N vers $f \in L$. Cela signifie exactement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(f_n - f) = 0$. Or

$$|K(f_n) - K(f)| \leq K(f_n - f) \leq N(f_n - f)$$

ce qui implique $K(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} K(f)$. Mais $K(f_n) \leq K$, d'où $K(f) \leq K$, et $f \in L_k$ qui est donc fermé dans (L, N)

9. (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$. On distingue quatre cas

1^{er} cas: Si $x, y \in I$, alors trivialement

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

2^{ème} cas: Si $x \in I$ et $y \notin I$, alors $y > 1$, et $\tilde{f}(y) = f(1)$, d'où $0 \leq 1 - x < y - x$, et par suite:

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(x) - f(1)| \leq k|x - 1| \leq k|x - y|$$

3^{ème} cas: Si $x \notin I$ et $y \in I$, alors $x < 0$, et $\tilde{f}(x) = f(0)$, d'où $0 \leq y < y - x$, et par suite:

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = |f(y) - f(0)| \leq k|y| \leq k|y - x|$$

4^{ème} cas: Si $x, y \notin I$. On distingue deux sous-cas

— Si $y < 0$ ou $x > 1$, il est évident que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$, soit $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = 0 \leq k|x - y|$

FONCTIONS CONTINUES ET LIPSCHITZIENNES. DENSITÉ

— Si $x < 0$ et $1 < y$, alors

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| = |f(1) - f(0)| \leq k \leq k|y - x|$$

- (b) L'application $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$, qui est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une de ses primitives. Il vient:

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \tilde{f}(t) dt = \frac{n}{2} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) \right)$$

Qui est bien de $\mathcal{C}^1$. De plus $f'_n(x) = \frac{n}{2} \left(\tilde{f}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \tilde{f}\left(x - \frac{1}{n}\right) \right)$, d'où:

$$\begin{aligned} |f'_n(x)| &= \frac{n}{2} \left| \tilde{f}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \tilde{f}\left(x - \frac{1}{n}\right) \right| \\ &\leq \frac{n}{2} k \left| \left(x + \frac{1}{n}\right) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \right| = k \end{aligned}$$

Il en résulte que f_n est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \tilde{f}(t) dt$$

Montrer que l'on définit ainsi une application $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui est k -lipschitzienne

10. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) - \tilde{f}(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (\tilde{f}(t) - \tilde{f}(x)) dt$. D'où

$$|f_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |\tilde{f}(t) - \tilde{f}(x)| dt \leq \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} k|t - x| dt$$

Puisque $|t - x| \leq \frac{1}{n}$, on en déduit $|f_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{k}{n}$. En particulier $|g_n(x) - f(x)| \leq \frac{k}{n}$ pour tout $x \in I$, soit : $\|g_n - f\|_\infty \leq \frac{k}{n}$. Ainsi on a prouvé (g_n) converge vers f dans $\mathcal{C}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit g_n la restriction de f_n à $[0, 1]$, montrer que la suite (g_n) est convergente dans $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ et déterminer sa limite

- (b) A la question précédente, on a montré que toute fonction $f \in L_k$ est limite uniforme d'une suite de fonctions (g_n) éléments de D_k : ceci signifie que l'adhérence de D_k dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est précisément L_k , autrement-dit que D_k est dense dans $(L_k, \|\cdot\|_\infty)$