

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

Partie I

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé E et h une forme linéaire non nulle sur E de noyau H

1. Dans cette question, E est supposé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E
 - (a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H . Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de H telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - u_n\| = d(x_0, H)$
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est bornée
 - (c) En déduire qu'il existe $y \in H$ tel que : $d(x_0, H) = \|x_0 - y\|$
On dit que la distance de x_0 à H est atteinte en y

Dans la suite de cette partie E est $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension quelconque .

2. Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau $\text{Ker}(h)$ est fermé dans E
3. On veut établir la réciproque. Par absurde on suppose que $\text{Ker}(h)$ est fermé et h n'est pas continue.
 - (a) Justifier l'existence d'une suite $(t_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0 \\ h(t_n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (b) En considérant la suite $(t_n - t_0)_{n \geq 0}$, aboutir à une contradiction puis conclure .
4. (a) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel E , alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .
(b) En déduire que tout H hyperplan de E est fermé ou dense dans E , c'est-à-dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$

Partie II

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E de dimension quelconque . H est le noyau d'une forme linéaire h , continue non nulle sur E . x_0 désigne un vecteur fixé de E .

5. (a) Justifier que l'ensemble $\left\{ \frac{|h(x)|}{\|x\|}, \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré
(b) Justifier l'existence de $\|h\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}$, puis montrer que $\forall x \in E, |h(x)| \leq \|h\| \|x\|$
6. (a) Montrer que, pour tout y de H on a : $\|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$
(b) En déduire que $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.
(c) En déduire que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$
7. On considère dans cette question que $x_0 \notin H$.
(a) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ d'éléments de $E \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\|h\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

- (b) Montrer que, pour tout entier n , il existe un réel λ_n et un vecteur y_n de H tel que :

$$w_n = \lambda_n x_0 + y_n$$

- (c) Prouver que, pour tout entier n : $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$

8. En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E , on a : $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$

Partie III

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

Dans cette partie, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est-à-dire que si $u = (u_n)_n \in E$ alors $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

9. Établir que si $u = (u_n)_n$ est une suite bornée alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

Soit h l'application définie sur E dans $\mathbb{R}$ par:

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

10. Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $\|h\| \leq 1$
11. Soit $(v_p)_{p \geq 0}$ une suite d'éléments de E , on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p .
On définit v_p par :

$$v_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq p \\ 0 & \text{si } n \geq p+1 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $\|h\|$

12. Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$\|h\| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$$

13. On note H le noyau de h , vérifier que H est un hyperplan fermé de E .
14. Montrer que la distance d'un vecteur x de E à H n'est pas atteinte.

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

Partie I

1. (a) On rappelle que $d(x_0, H) = \inf_{y \in H} \|x_0 - y\|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $u_n \in H$ tel que :

$$d(x_0, H) \leq \|x_0 - u_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{2^n}$$

Par suite, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - u_n\| = d(x_0, H)$

- (b) On a $\|u_n\| \leq \|u_n - x_0\| + \|x_0\|$. La suite $(\|u_n - x_0\|)_n$ est convergente, donc bornée

Par suite $(\|u_n\|)_n$ est aussi bornée.

- (c) H étant de dimension finie, d'après Bolzano-weirstrass, on peut extraire une suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente. Notons y sa limite, alors par continuité de la norme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\varphi(n)} - x_0\| = \|y - x_0\|$$

D'autre part : $d(x_0, H) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\varphi(n)} - x_0\|$, car $(\|u_{\varphi(n)} - x_0\|)$ est extraite de la suite convergente $(\|u_n - x_0\|)_n$.

On en déduit que $d(x_0, H) = \|y - x_0\|$.

2. $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $\text{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E

3. (a) h est linéaire non continue, donc elle n'est pas continue en 0, donc

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } \|x\| < \delta \text{ et } |h(x)| \geq \varepsilon$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ et $|h(x_n)| \geq \varepsilon$

Posons $t_n = \frac{x_n}{h(x_n)}$, on a $h(t_n) = 1$ et $\|t_n\| = \frac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} \leq \frac{\|x_n\|}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2^n \varepsilon}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

- (b) On a $h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 0$ donc $t_n - t_0 \in H$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - t_0) = -t_0 \notin H$. Ce qui contredit que H est fermé

4. Soit F un sous-espace de E ,

— $\overline{F} \neq \emptyset$ (Car F l'est)

— Soit $(x, y) \in \overline{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$$

On a alors $(\lambda x_n + y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda x_n + y_n = \lambda x + y$ donc $\lambda x + y \in \overline{F}$

5. Soit H un hyperplan de E on a $H \subset \overline{H}$. Supposons que $\overline{H} \neq H$, soit $a \in \overline{H} \setminus H$

H est un hyperplan et $a \notin H$ donc $E = H \oplus \mathbb{R}a$

Soit $x \in E$, il existe $(x_1, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que : $x = x_1 + \lambda a$

On a $x_1 \in H \subset \overline{H}$ et $\overline{H}$ est un sev de E , donc $x \in \overline{H}$. Par suite $\overline{H} = E$

Partie II

6. (a) L'application h est linéaire continue, donc elle est bornée sur la sphère unité, ainsi il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in S(O, 1), |h(x)| \leq K$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in S(O, 1)$, donc

$$\frac{|h(x)|}{\|x\|} = \left| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq K$$

Donc $\left\{ \frac{|h(x)|}{\|x\|}, \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

(b) L'ensemble $\left\{ \frac{|h(x)|}{\|x\|}, \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure, ce qui justifie l'existence de $\|h\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\frac{|h(x)|}{\|x\|} \leq \|h\|$, donc $|h(x)| \leq \|h\| \|x\|$.

Une telle inégalité est vérifiée si $x = 0$. Ainsi

$$\forall x \in E, |h(x)| \leq \|h\| \|x\|$$

7. (a) On a $y \in H$ donc $h(y) = 0$, par suite :

$$|h(x_0)| = |h(x_0) - h(y)| = |h(x_0 - y)| \leq \|h\| \|x_0 - y\|$$

$$\text{Donc } \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$$

(b) D'après la question précédente on a $d(x_0, H) = \inf_{y \in H} \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$

(c) Si $x_0 \in H$, alors $d(x_0, H) = 0$.

Réciproquement. Si $d(x_0, H) = 0$ alors, d'après la question précédente, on a :

$$0 = d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|} \geq 0$$

Donc $h(x_0) = 0$, soit $x_0 \in \text{Ker}(h) = H$.

8. On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

(a) D'après la caractérisation de la borne supérieure, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \setminus \{0\} \text{ tel que : } \|h\| - \varepsilon \leq \frac{|h(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|h\|$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$\|h\| - \frac{1}{2^n} \leq \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \|h\|$$

$$\text{Donc } \|h\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

(b) H est un hyperplan et $x_0 \notin H$, donc $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_n \in \mathbb{R}$ et y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n \in H = \text{Ker}(h)$, donc $h(w_n) = \lambda_n h(x_0)$ et par suite $|h(w_n)| = |\lambda_n| |h(x_0)|$

— Si $\lambda_n = 0$, alors $|h(w_n)| = 0$ et l'inégalité $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ est triviale

— Sinon, on a $\|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 + \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| \geq |\lambda_n| d(x_0, H)$

$$\text{Donc : } |\lambda_n| \leq \frac{\|w_n\|}{d(x_0, H)} \quad (d(x_0, H) > 0 \text{ car } x_0 \notin H)$$

Par suite :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$$

9. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a :

$$\|h\| \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)} \text{ donc } d(x_0, H) \leq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$$

$$\text{Ainsi: } d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$$

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

Partie III

10. La suite $(u_n)_n$ est convergente donc bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ converge, donc

$\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est absolument convergente par suite elle est convergente.

11. L'application h est linéaire car pour $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

De plus pour tout $u \in E$,

$$|h(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

On a pour tout $u \in E$, $|h(u)| \leq \|u\|_\infty$, donc u est continue et on a $\|h\| \leq 1$

12. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a $h(v_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_p(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^p}$ et $\|v_p\|_\infty = 1$, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1$. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq \|h\|$ par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \|h\|$. Ainsi $\|h\| = 1$

13. Supposons qu'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ telle que : $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = \|h\| = 1$

Alors $|h(u)| = \|u\|_\infty$, ce qui donne que :

$$|h(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty \text{ ce qui donne que } \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(\|u\|_\infty - |u_n|)}{2^{n+1}}}_{\geq 0} = 0$$

Donc $|u_n| = \|u\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement-dit la suite $|u|$ est constante. Mais par définition de E , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par suite $\|u\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ absurde car $u \neq 0$

14. h est continue, donc H est fermé

15. Soit $x \notin H$, supposons qu'il existe $u \in H$ tel que : $d(x, H) = d(x, u) = \|x - u\|$

On a

$$\|x - u\|_\infty = d(x, H) = \frac{|h(x)|}{\|h\|} = |h(x)| = |h(x - u)| \quad (h(u) = 0 \text{ car } u \in H)$$

En posant $a = x - u$, on a $|h(a)| = \|a\|_\infty$ ce qui n'est pas possible d'après la question précédente.