

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

Dans ce document

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier supérieur ou égal à deux ;
- Pour $A \in M_p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_p - A)$

PROBLÈME 1: $GL_p(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_p(\mathbb{K})$

1. Montrer que l'application $\det$ est continue sur $M_p(\mathbb{K})$
2. En déduire que $GL_p(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_p(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$.
 - (a) Montrer que $\exists \alpha > 0, \forall \lambda \in]0, \alpha[, \chi_A(\lambda) \neq 0$.
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = A - \frac{\alpha}{2n} I_p$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \in GL_p(\mathbb{K})$
4. En déduire $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$.
5. **Application:** Soit $A, B \in M_p(\mathbb{K})$
 - (a) On suppose que $A \in GL_p(\mathbb{K})$, montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.
 - (b) Montrer que l'égalité précédente est encore vraie si A n'est plus inversible.

PROBLÈME 2: Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$

1. Montrer la continuité de l'application $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), M \mapsto M^n$
2. En déduire que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est-il borné ?
4. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
 - (a) Montrer que A n'est pas inversible.
 - (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathcal{B}(A, \varepsilon) \not\subseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
 - (c) Déduire $\widehat{\mathcal{N}_n(\mathbb{K})}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est étoilé en $\mathcal{O}_n$, puis qu'il est connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{K})$.

PROBLÈME 3: Matrices stochastiques

Une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle est à coefficients positifs et que de plus

$$\sum_{i=1}^p m_{i,j} = 1, \text{ pour tout } j \in [1, p].$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est un compact convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
2. On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right)$ si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$.

On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(A) = \text{Tr}(A)$

- (a) Montrer que f est linéaire continue
- (b) Montrer que f est bornée sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes puis déterminer ces bornes.
- (c) Montrer que $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est un segment de $\mathbb{R}$ qu'on déterminera.

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

PROBLÈME 4: Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$

1. (a) Montrer que l'ensemble E des matrices non inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$ est étoilé en $0_{M_n(\mathbb{K})}$
(b) En déduire que E est connexe par arcs
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$

(a) Justifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure dont

les éléments diagonaux sont non nuls telles que $A = PTP^{-1}$

(b) On écrit $m_{kk} = \rho_k e^{i\theta_k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $\rho_k > 0$ et on considère l'application $\varphi : [0, 1] \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ par

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \rho_1^t e^{it\theta_1} & tm_{12} & \cdots & \cdots & tm_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & tm_{n-1,n} & \rho_n^t e^{it\theta_n} \end{pmatrix}$$

Justifier que φ est continue sur $[0, 1]$

- (c) Montrer que $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$
- (d) Considérer $\psi = P\varphi P^{-1}$ et montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
3. Que dire de $GL_n(\mathbb{R})$?

PROBLÈME 5: Composantes connexes dans $GL_n(\mathbb{R})$

1. On note $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n \mid \det(M) = 1\}$ le groupe spécial linéaire. On admet que $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
(a) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Indication: On pourra relier toute matrice M à I_n .
(b) $SL_n(\mathbb{R})$ est-il étoilé en I_n ?
2. On note $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$. Soit $M, M' \in GL_n^+(\mathbb{R})$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $D(\alpha) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$.
(a) Justifier l'existence de $N, N' \in SL_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \alpha' > 0$, telles que $M = D(\alpha)N$ et $M' = D(\alpha')N'$.
(b) En utilisant que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, relier les deux matrices M et M' par un chemin continu et inclus dans $GL_n^+(\mathbb{R})$. Conclure
3. On pose $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$ et soit $\sigma \in GL_n^-(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que l'application $\gamma : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto \sigma M \end{cases}$ est continue
(b) Montrer que $GL_n^-(\mathbb{R}) = \gamma(GL_n^+(\mathbb{R}))$
(c) En déduire que $GL_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

PROBLÈME 6: Groupe orthogonal d'ordre $n \geq 2$

On rappelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$

1. (a) Montrer que l'application $A \mapsto {}^tAA$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$;
(b) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
2. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

3. Montrer que $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est compact.

PROBLÈME 7: Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$

1. Justifier que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

On pose $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{C})$

2. On pose $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \lambda_j \\ \inf \{|\lambda_i - \lambda_j|, \mid \lambda_i \neq \lambda_j\} & \end{cases}$ et on définit la suite de matrices $(T_k)_{k \geq 1}$ par $T_k = T + \Delta_k$, où

$$\Delta_k = \text{diag} \left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha}{2k}, \dots, \frac{\alpha}{nk} \right)$$

(a) Montrer que T_k admet n valeurs propres distinctes deux à deux.

(b) Montrer que $A_k = PT_kP^{-1}$ est diagonalisable

(c) Déterminer la limite de la suite $(A_k)_{k \geq 1}$

3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

4. Le résultat reste-t-il vrai dans $M_n(\mathbb{R})$?

PROBLÈME 8: Matrice de rang $\leq r$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ On appelle matrice extraite de A toute matrice B obtenue de A en supprimant un certain nombre de lignes ou de colonnes. Soit r un entier naturel, avec $r \leq n$.

On admet les deux résultats suivant : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$

- (i) Si le rang de A est égal à r alors il existe une matrice extraite carrée d'ordre r de la matrice A qui est inversible.
- (ii) S'il existe une matrice extraite de la matrice A , qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .

1. On notera $R_r = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) = r\}$ et $R_r^- = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) \leq r\}$. On définit la fonction f de $M_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(A) = \sum_{\substack{B \text{ extraite de } A \\ \text{Ordre de } B > r}} |\det(B)|$$

La somme étant prise sur toutes les matrices carrées B extraites de A et d'ordre supérieure strictement à r

(a) Justifier que f est continue sur $M_n(\mathbb{K})$

(b) Montrer qu'une matrice $A \in R_r^-$ si et seulement si $f(A) = 0$

(c) En déduire que R_r^- est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$

2. **Application:** Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $M_n(\mathbb{K})$ convergeant vers une matrice M du rang r

(a) Justifier que $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) \geq r\}$ est ouvert de $M_n(\mathbb{K})$

(b) Montrer que pour p assez grand, on a $\dim \text{Ker}(M_p) \leq \dim \text{Ker}(M)$

3. Prouver que l'adhérence de R_r est inclus dans R_r^-

4. Inversement, si $A \in R_r^-$

(a) Justifier que A s'écrit: $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ où $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $0 \leq \alpha \leq r$.

(b) Construire une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de rang r convergeant vers A .

5. Conclure que $\overline{R_r} = R_r^-$

6. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

PROBLÈME 1: $GL_p(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_p(\mathbb{K})$

1. L'application $E_{ij}^* : \begin{cases} M_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} & \longmapsto a_{ij} \end{cases}$ est linéaire et $M_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc elle continue. $\mathbb{K}$ étant une $\mathbb{K}$ -algèbre normée et par la formule de Leibniz $\det = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n E_{i\sigma(i)}^*$, l'application $\det$ est continue est continue sur $M_p(\mathbb{K})$
2. On a

$$\begin{aligned} A \in GL_p(\mathbb{K}) &\iff \det(A) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \in \mathbb{K}^* \\ &\iff A \in \det^{-1}(\mathbb{K}^*) \end{aligned}$$

Alors $GL_p(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, avec $\mathbb{K}^*$ ouvert dans $\mathbb{K}$ et $\det$ est continue, donc $GL_p(\mathbb{K})$ est ouvert dans de $M_p(\mathbb{K})$.

3. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$.
 - (a) Rappelons que $\text{Sp}(A) \setminus \{0\}$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal p .
 - Si $\text{Sp}(A) \setminus \{0\} = \emptyset$, alors on prend α quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, on a $\lambda \notin \text{Sp}(A)$, donc $\chi_A(\lambda) \neq 0$
 - Sinon soit $\alpha = \min\{|z|, z \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$. Alors pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, on a $\chi_A(\lambda) \neq 0$, car sinon λ sera une racine non nulle de χ_A et par suite $\lambda = |\lambda| \geq \alpha$. Absurde
 Bref $\exists \alpha > 0, \forall \lambda \in]0, \alpha[, \chi_A(\lambda) \neq 0$.
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{\alpha}{2n} \in]0, \alpha[$, donc $\det(A_n) = \det(A - \frac{\alpha}{2n}I_p) = (-1)^p \chi_A\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \neq 0$. Donc $A_n \in GL_p(\mathbb{K})$
4. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$. D'après la question 3a il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \lambda \in]0, \alpha[, \chi_A(\lambda) \neq 0$. Posons $A_n = A - \frac{\lambda}{2n}I_p$, alors la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est d'éléments de $GL_p(\mathbb{K})$ vérifiant $\|A_n - A\| = \frac{\alpha}{2n} \|I_p\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$
5. **Application:** Soit $A, B \in M_p(\mathbb{K})$
 - (a) Si $A \in GL_p(\mathbb{K})$, alors AB et $BA = A^{-1}(AB)A$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique et, par suite $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.
 - (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les deux applications

$$\psi_1 : \begin{cases} M_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ A & \longmapsto \det(\lambda I_p - AB) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_2 : \begin{cases} M_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ A & \longmapsto \det(\lambda I_p - BA) \end{cases}$$

sont continues et elles coïncident sur $GL_p(\mathbb{K})$ qui est dense dans $M_p(\mathbb{K})$, donc elles sont égales.

PROBLÈME 2: Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices nilpotentes

1. Soit

$$\varphi_1 : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow M_n(\mathbb{K})^n \\ A & \longmapsto (A, \dots, A) \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{cases} M_n(\mathbb{K})^n & \longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ (A_1, \dots, A_n) & \longmapsto \prod_{i=1}^n A_i \end{cases}$$

φ_1 est continue en dimension finie, donc elle est continue et φ_2 est n -linéaire en dimension finie, donc elle est continue. Ainsi $f = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est continue par composition.

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, on a

$$M \in N_n(\mathbb{K}) \iff M^n = 0 \iff f(M) = 0 \iff f(M) \in \{0\} \iff M \in f^{-1}(\{0\})$$

Alors $N_n(\mathbb{K}) = f^{-1}(\{0\})$, avec $\{0\}$ fermé dans $M_n(\mathbb{K})$ et f est continue, donc $N_n(\mathbb{K})$ est fermé dans de $M_n(\mathbb{K})$

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = pE_{1,n} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A_p \in N_n(\mathbb{K})$ et $\|A_p\| = p\|E_{1,n}\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $N_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné.
4. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
- (a) A est nilpotente, donc $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$, donc A n'est pas inversible.
 - (b) Soit $\varepsilon > 0$. Par absurde si $\mathcal{B}(A, \varepsilon) \not\subset \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. Mais $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{B}(A, \varepsilon) \cap \text{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, donc la boule $\mathcal{B}(A, \varepsilon)$ contient une matrice inversible et, par suite, l'ensemble $N_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible. Absurde
 - (c) Si $\widehat{\mathcal{N}_n(\mathbb{K})} \neq \emptyset$, alors il existe $A \in N_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(A, \varepsilon) \subset N_n(\mathbb{K})$. Absurde, vu le résultat de la question précédente
5. On a $\mathcal{O}_n \in N_n(\mathbb{K})$. Soit $N \in N_n(\mathbb{K})$, montrons $[\mathcal{O}_n, N] \subset N_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in [0, 1]$, on a $(tN)^n = t^n N^n = \mathcal{O}_n$, donc $tN \in N_n(\mathbb{K})$. Donc $N_n(\mathbb{K})$ est étoilée en $\mathcal{O}_n$. En fin Toute partie étoilée est connexe par arcs.

PROBLÈME 3: Matrices stochastiques

1. — Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est fermé.

Pour $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose

$$\psi_{i,j} : \begin{cases} M_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p} & \longmapsto m_{i,j} \end{cases}$$

et pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on pose

$$S_j : \begin{cases} M_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p} & \longmapsto \sum_{I=0}^p m_{i,j} \end{cases}$$

Les applications considérées sont linéaires et $\dim M_p(\mathbb{R}) < +\infty$, donc elles sont continues.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}) &\iff \begin{cases} \forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, & \psi_{i,j}(M) \geq 0 \\ \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, & S_j(M) = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, & M \in \psi_{i,j}^{-1}([0, +\infty[) \\ \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, & M \in S_j^{-1}(\{1\}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}) = \left(\bigcap_{1 \leq i, j \leq p} \psi_{i,j}^{-1}([0, +\infty[) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^p S_j^{-1}(\{1\}) \right)$$

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les ensembles $\psi_{i,j}^{-1}([0, +\infty[)$ et $S_j^{-1}(\{1\})$ sont des fermés, car ils sont des images réciproques des fermés par des applications continues, en conséquence $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est fermé comme intersection de fermés

- Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est borné. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^p |m_{i,j}| \right) = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{i=1}^p m_{i,j} \right) = 1$$

Donc $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est borné. L'espace $M_p(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est compact de $M_p(\mathbb{R})$.

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

- Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est convexe. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ deux matrices de $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $tA + (1-t)B = (ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ et

$$\forall i, j \in [1, p], \quad ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j} \geq 0$$

Et pour tout $j \in [1, p]$,

$$\sum_{i=1}^p ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j} = t \sum_{i=1}^p a_{i,j} + (1-t) \sum_{i=1}^p b_{i,j} = t + (1-t) = 1$$

Donc $tA + (1-t)B \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$. D'où $[A, B] \subset \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$

2. (a) $f : \begin{cases} M_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ A & \longmapsto \text{Tr}(A) \end{cases}$ est linéaire et $\dim M_p(\mathbb{R}) < +\infty$, donc f est continue
- (b) — f est continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est compact, donc f est bornée sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes.
- Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, on a :

$$0 \leq m_{i,i} \leq \sum_{k=1}^p m_{k,i} = 1$$

Donc $0 \leq f(M) \leq p$. Or $I_p \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et $f(I_p) = p$, donc $p = \max f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$. En outre pour $J =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \text{ on a } J \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}) \text{ et } f(J) = 0, \text{ donc } 0 = \min f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})).$$

- (c) Montrons que $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})) = [0, p]$
- f étant continue et $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs, donc $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est un intervalle
- $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})) \subset [0, p]$
- Comme $0, p \in f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$, donc $[0, p] \subset f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$

PROBLÈME 4: Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$

1. (a) On a $\mathcal{O}_n \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$. Soit $N \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$, montrons $[\mathcal{O}_n, N] \subset M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in [0, 1]$, on a $\det(tN) = 0$, donc $tN \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$. Donc $M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est étoilée en $\mathcal{O}_n$.
- (b) Toute partie étoilée est connexe par arcs.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$

(a) Toute matrice complexe est trigonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}$

triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. De plus $\prod_{k=1}^n m_{k,k} = \det(T) = \det(A) \neq 0$, donc $\forall k \in [1, n]$,

$$m_{k,k} \neq 0$$

- (b) Pour tout $k \in [1, p]$, l'application:

$$\varphi_{k,k} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto \rho_k^t e^{it\theta_k} \end{cases}$$

est continue. De plus pour tout $i \neq j \in [1, n]$, l'application affine

$$\varphi_{i,j} : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto tm_{i,j} \end{cases}$$

est continue. Donc φ est continue sur $[0, 1]$, car ses fonctions composantes sont continues sur $[0, 1]$

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

- (c) Soit $t \in [0, 1]$, on a $\det \varphi(t) = \left(\prod_{k=1}^n \rho_k \right)^t e^{it \sum_{k=1}^n \theta_k} \neq 0$, donc $\varphi(t) \in GL_n(\mathbb{C})$, avec $\varphi(1) = T$ et $\varphi(0) = I_n$.
- (d) L'application $S : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto PMP^{-1} \end{cases}$ est continue, car elle est linéaire et $\dim M_n(\mathbb{C}) < +\infty$.
Alors $\psi = S \circ \varphi : [0, 1] \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ est continue par composition. En fin pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\det(\psi(t)) = \det(\varphi(t)) \neq 0$, donc $\psi(t) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $\psi : [0, 1] \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est continue, avec $\psi(0) = I_n$ et $\psi(1) = A$. Soit maintenant $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, on sait qu'il existe un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$ joignant A et I_n et un autre joignant B et I_n , donc il existe un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$ joignant A et B . Ainsi $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Comme $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, $\det$ est continue et $\mathbb{R}$ n'est pas connexe par arcs, alors $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

PROBLÈME 5: Composantes connexes dans $GL_n(\mathbb{R})$

1. (a) Remarquons d'abord que $T_{i,j}^{-1}(\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)$. Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$, alors il existe des transvections $(T_{i_k, j_k}(\lambda_k))_{k=1}^p$ telles que $M = \prod_{k=1}^p T_{i_k, j_k}(\lambda_k)$. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $\psi_k : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto T_{i_k, j_k}(t\lambda_k) \end{cases}$.
De telles fonctions ψ_k sont continues car leurs fonctions coordonnées sont continues et comme $M_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre normée, alors $\psi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto \prod_{k=1}^p T_{i_k, j_k}(t\lambda_k) \end{cases}$ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1]$, on a $\det(\psi(t)) = 1$ c'est-à-dire $\psi(t) \in SL_n(\mathbb{R})$. En outre $\psi(0) = I_n$ et $\psi(1) = M$. Donc il existe un chemin dans $SL_n(\mathbb{R})$ joignant I_n et M . Soit maintenant $M, N \in SL_n(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe un chemin dans $SL_n(\mathbb{R})$ joignant M et I_n et un autre joignant N et I_n , donc il existe un chemin dans $SL_n(\mathbb{R})$ joignant M et N . Ainsi $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
- (b) Pour $n = 2$, on pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, mais $\mathcal{O}_2 = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}M \notin SL_2(\mathbb{R})$, donc $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas étoilé en I_2 .
2. (a) Soit $\alpha = \det(M)$ et $\alpha' = \det(M')$, puis on pose $N = D\left(\frac{1}{\alpha}\right)M$ et $N' = D\left(\frac{1}{\alpha'}\right)M'$, alors $\alpha, \alpha' > 0$ et $\det(N) = \det(N') = 1$. Les nombres α et α' et les matrices N et N' vérifient les conditions demandées.
- (b) Soit $\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ un chemin joignant $\gamma_2(0) = N$ et $\gamma_2(1) = N'$ et soit $\gamma_1 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto D((1-t)\alpha + \alpha't) \end{cases}$.
L'application γ_1 est continue car ses fonctions coordonnées est continue sur $[0, 1]$ et par le produit $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est continue et elle vérifie $\forall t \in [0, 1]$, $\det(\gamma(t)) = (1-t)\alpha + \alpha't > 0$ et $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = M'$, c'est-à-dire γ est un chemin dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ joignant M et M' . Donc $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
3. On pose $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$ et soit $\sigma \in GL_n^-(\mathbb{R})$.
- (a) L'application $\gamma : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto \sigma M \end{cases}$ est linéaire et $\dim M_n(\mathbb{R}) < +\infty$, donc elle est continue.
- (b) Soit $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(\sigma M) = \underbrace{\det(\sigma)}_{<0} \underbrace{\det(M)}_{>0} < 0$, donc $\gamma(M) \in GL_n^-(\mathbb{R})$, puis $\gamma(GL_n^+(\mathbb{R})) \subset GL_n^-(\mathbb{R})$. Inversement soit $N \in GL_n^-(\mathbb{R})$, on pose $M = \sigma^{-1}N$, on a bien $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$, car $\det(M) = \det(\sigma^{-1})\det(N) = \underbrace{\det(\sigma^{-1})}_{<0} \underbrace{\det(N)}_{<0} > 0$ et $\gamma(M) = \sigma M = N$, donc $N \in \gamma(GL_n^+(\mathbb{R}))$ et par suite $GL_n^-(\mathbb{R}) \subset \gamma(GL_n^+(\mathbb{R}))$.
- (c) Comme $GL_n^-(\mathbb{R}) = \gamma(GL_n^+(\mathbb{R}))$, γ est continue et $GL_n^+(\mathbb{R})$ es connexe par arcs, alors $GL_n^-(\mathbb{R}) = \gamma(GL_n^+(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs.

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

PROBLÈME 6: Groupe orthogonal d'ordre $n \geq 2$

1. (a) Posons

$$g : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (M_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \longmapsto & (M, {}^t M) \end{cases}, \quad h : \begin{cases} M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \longmapsto & MN \end{cases} \quad \text{puis } f : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^t M \end{cases}$$

g est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) — $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

— Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{i,j}| \leq 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty \leq 1$.

Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ est connexe par arcs dans puisqu'il est l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue. Absurde

3. $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé et inclus dans le compact $O_n(\mathbb{R})$, donc il s'agit d'un compact

PROBLÈME 7: Densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$

1. Toute matrice complexe est trigonalisable

2. (a) Soit $k \geq 1$, notons que le spectre de T_k est $\left\{ \lambda_i + \frac{\alpha}{ik}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. Soit $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

— Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\lambda_i + \frac{1}{ik} \neq \lambda_j + \frac{1}{jk}$

— Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $\lambda_i + \frac{1}{ik} = \lambda_j + \frac{1}{jk}$ entraîne $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{\alpha}{k} \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{j} \right| < \frac{\alpha}{k} \leq \alpha$

ce qui contredit la définition de α et donc les valeurs propres T_k sont deux à deux distinctes

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_k est semblable à T_k , donc elle est diagonalisable de n valeurs propres distinctes deux à deux.

(c) $T_k = T + \Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} T$ et par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, alors $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, la suite construite $(A_k)_{k \geq 1}$ est une suite de matrices admettant n valeurs propres distinctes qui tend vers A . D'où la densité demandée

4. Le résultat précédent est faux sur $M_n(\mathbb{R})$. Dans le cas $n = 2$, l'application $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le discriminant de son polynôme caractéristique:

$$\varphi(M) = (a - d)^2 + 4bc$$

φ est continue car pour toute $M \in M_2(\mathbb{R})$, l'expression de $\varphi(M)$ est un polynôme en les coefficients de M . Donc si on choisit une matrice A dont le discriminant de son polynôme caractéristique est strictement négatif et on suppose qu'il existe une suite de matrices réelles diagonalisables $(A_k)_{k \geq 0}$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$, alors $\varphi(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \varphi(A)$. Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme χ_{A_k} est scindé, donc $\varphi(A_k) \geq 0$ et par passage à la limite $\varphi(A) \geq 0$. Absurde

PROBLÈME 8: Matrice de rang $\leq r$

1. (a) Pour toute matrice carrée B extraite $\det(B)$ est un polynôme en les coefficients de A . En outre $|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, donc par composition puis par somme des fonctions continues l'application f est continue

(b) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $f(A) = 0$ si, et seulement, si le déterminant de toute matrice extraite de A d'ordre $> r$ est nul si, et seulement, si toute matrice extraite de A d'ordre $> r$ est non inversible si, et seulement, si $A \in R_r^-$

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $M_n(\mathbb{K})$

- (c) $A \in R_r^-$ si et seulement si $A \in f^{-1}(\{0\})$, donc $R_r^- = f^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$
2. **Application:** Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $M_n(\mathbb{K})$ convergeant vers une matrice M du rang r
- (a) On a $R_+^r = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) \geq r\} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) > r-1\} = \mathcal{C}_{M_n(\mathbb{K})}^{R_{r-1}^-}$ est le complémentaire d'un fermé de $M_n(\mathbb{K})$
- (b) Comme $M \in R_+^r$ et R_+^r est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(M, \varepsilon) \subset R_+^r$. Par hypothèse $M_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} M$, alors il existe p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$: $M_p \in B(M, \varepsilon)$, soit $\text{rg}(M_p) \geq \text{rg}(M)$ ou encore, par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(M_p) \leq \dim \text{Ker}(M)$
3. R_r^- contient R_r et est fermé, donc $\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$
4. (a) Soit $\alpha = \text{rg}(A)$, alors A s'écrit: $A = P \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ où $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $0 \leq \alpha \leq r$.
- (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = P \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} I_{r-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice A_k est du rang r et par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMQ$, alors $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$
5. D'après la question 4b, on a $R_r^- \subset \overline{R_r}$ et d'après la question 3, on a $\overline{R_r} \subset R_r^-$. Donc l'égalité demandée
6. Il suffit de voir que $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = R_n$ et que $M_n(\mathbb{K}) = R_n^-$. D'après la question précédente $\overline{R_n} = R_n^-$, alors $\overline{\text{GL}_n(\mathbb{K})} = M_n(\mathbb{K})$