

NORMES SUBORDONNÉES

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés non nuls, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F .
- $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes continus de E

Une $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathbb{A}, +, \times, \cdot)$ est dite normée s'il existe une norme N sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ qui vérifie en outre la propriété:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{A}^2, N(u \times v) \leq N(u) \times N(v)$$

On dit alors que N est une norme d'algèbre.

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose $\|u\| = \sup \left\{ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$

1. Montrer que $\|u\|$ est bien définie
2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, appelée la norme subordonnée.
3. Montrer que
 - (a) $\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$;
 - (b) $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \times \|x\|_E$;
 - (c) $\|u\| = \inf \{k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E\}$.
4. (a) Montrer que $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ est une algèbre normée;
- (b) Calculer $\|\text{Id}_E\|$.

Partie II: Exemples de calcul

5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \max_{t \in [0,1]} |P(t)|$. Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(0) \end{cases}$. Montrer que u est continue et calculer $\|u\|$.

6. Soient $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ non nulle. On munit E de la norme usuelle $\|\cdot\|_2$. Soit $T_\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \end{cases}$.
Montrer que T_φ est continue et calculer $\|T_\varphi\|$.

7. Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$\forall f \in E, N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } \forall f \in F, N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- (a) On définit $T : E \rightarrow F$ par :

$$\forall f \in E, T(f) : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_0^x f dt \end{cases}$$

Montrer que T est une application linéaire continue de (E, N_1) dans (F, N_2)

- (b) Calculer $\|T\|$

Partie III: Normes matricielles

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ avec $m \in \{n, p\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, on pose

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|, \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2} \quad \text{et} \quad \|X\|_\infty = \max_{i \in [1, m]} |x_i|$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

NORMES SUBORDONNÉES

8. On munit $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ des normes infinies $\|\cdot\|_\infty$

(a) Montrer que $\|AX\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$ puis que $\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}| = \sum_{j=1}^p |a_{kj}|$. Posons $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{kj} = |a_{kj}|e^{i\theta_j}$ et soit $X_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_p} \end{pmatrix}$.

Calculer $\|X_0\|_\infty$ et montrer que $\|AX_0\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$

(c) En déduire que $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$.

9. On munit $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $M_{n,1}(\mathbb{K})$ des normes $\|\cdot\|_1$

(a) Montrer que $\|AX\|_1 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_1$ et déduire $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$, on pose $X_0 = (\delta_{ik})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Calculer $\|X_0\|_1$ et montrer que $\|AX_0\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

(c) En déduire $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

10. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on pose

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2}$$

Montrer que $\|A\|_2 \leq \|A\|_2$. A-t-on l'égalité

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$

1. u est une application linéaire continue, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que:

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$$

En particulier: $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq k$. Ceci montre que l'ensemble $\left\{ \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré de $\mathbb{R}$ et puisqu'il est non vide, d'après l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne supérieure. D'où l'existence de $\|u\|$.

2. Soit $u, v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

— **Séparation:** Si $\|u\| = 0$ alors $\forall x \in E \setminus \{0\}, u(x) = 0$. Or u est linéaire, donc $u(0) = 0$, soit $u = 0$

— **Homogénéité:** $\|\alpha u\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|\alpha u(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \|u\|$.

— **Inégalité triangulaire:** Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\|(u+v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|$$

donc

$$\frac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|v(x)\|}{\|x\|} \leq \|u\| + \|v\|$$

d'où $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

On déduit que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

(a) — Montrons que $\|u\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$:

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$ donc $\left\| u \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Or u est linéaire donc $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ donc $\|u\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

— L'inégalité $\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ est triviale, car la sphère unité est incluse dans la boule unité fermée

— Montrons que $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \|u\|$:

Soit $x \in E$ de norme inférieur ou égale à 1

— Si $x = 0$, alors $0 = \|u(x)\| \leq \|u\|$

— Si $x \neq 0$, on a $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \|u\|$, donc

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\| \leq \|u\|$$

Donc $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \|u\|$.

- (b) Soit $x \in E$

— Si $x = 0$, on a $0 = \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$

— Si $x \neq 0$, on a $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \|u\|$, donc $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$

Donc $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$

- (c) — Montrons que $\|f\| \leq \inf \{k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$:

On pose $K = \{k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$ et soit $k \in K$ donc $\forall x \in E \setminus \{0\}, \|f(x)\| \leq k\|x\|$ donc

$\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k$ d'où $\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k$.

On déduit que $\forall k \in K, \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq k$ d'où $\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \inf K$.

NORMES SUBORDONNÉES

- Montrons que $\inf\{k \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\} \leq \|f\|$:
Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$ donc $\left\|f\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leq \|f\|$. Or f est linéaire donc $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\|$
d'où $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$.
On déduit que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ donc $\|f\| \in \{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$ d'où
 $\inf\{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\} \leq \|f\|$.

4. (a) Soit $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors pour tout $x \in E$, on a:

$$\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| \leq \|u\| \|v(x)\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|x\|$$

Donc $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, donc $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre

- (b) En outre $\|\text{Id}_E\| = 1$.

Partie II: Exemples de calcul

5. — u est une forme linéaire. Et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a:

$$|u(P)| = |P(0)| \leq \|P\|$$

Donc u est lipschitzienne en 0, ce qui montre que u est continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme considérée

- D'une part $\|u\| \leq 1$. D'autre part, pour $P = 1$, on a $\frac{|u(P)|}{\|P\|} = 1 \geq \|u\|$.

Donc $\|u\| = 1$

6. T_φ est bien définie et clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_2 \cdot \|f\|_2$$

donc T_φ est continue et $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_2$.

Pour $f = \varphi$, on a: $|T_\varphi(\varphi)| = \|\varphi\|_2^2$, donc $\|T_\varphi\| \geq \|\varphi\|_2$, puis $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_2$

7. Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- (a) L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|T(f)(x)| \leq xN_1(f) \leq N_1(f)$ donc $\|T(f)\|_\infty \leq N_1(f)$, puis

$$N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_1(f)$$

Ainsi T est continue

- (b) D'après la question précédente $\|T\| \leq 2$. Or

$$N_2(T(\exp)) = 2N_1(\exp)$$

Donc $\|T\| \geq 2$, puis $\|T\| = 2$

Partie III: Normes matricielles

8. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

- (a) On a

$$\|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$$

donc

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- (b) On a $\|X_0\|_\infty = 1$, donc

$$\|A\|_\infty \geq \|AX_0\| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n |a_{kj}|e^{i\theta_j}e^{-i\theta_j} \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

NORMES SUBORDONNÉES

(c) D'une part $\|A\|_\infty \geq \|AX_0\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, donc $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \|A\|_\infty$ et d'autre part, d'après la

question 8a, $\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, donc

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

9. (a) On a

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| = \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$(b) \text{ On a } \|X_0\|_1 = 1 \text{ et } \|AX_0\| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$(c) \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

(d) D'une part $\|A\|_1 \geq \|AX_0\|_1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, donc $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \|A\|_1$ et d'autre part, d'après la

question 9a, $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, donc

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

10. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \|AX\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}| |x_j| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2 \sum_{k=1}^p |x_k|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2 \|X\|_2^2 = \|A\|_2^2 \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

On déduit que $\|AX\|_2 \leq \|A\|_2 \|X\|_2$ d'où $\|A\|_2 \leq \|A\|_2$.