

THÉORÈME DE RIESZ

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé non nul (non nécessairement de dimension finie) et d la distance associée à $\|\cdot\|$

Partie I: Distance à un sous-espace vectoriel de dim finie

H un sous espace vectoriel, de dimension finie de E et $x \in E$.

On rappelle que $d(x, H) = \inf_{h \in H} d(x, h)$

1. Montrer que $\exists (x_n)$ une suite d'éléments de H telle que $d(x, H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$
2. Montrer que la suite (x_n) est bornée
3. En déduire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $a \in H$.
4. Justifier que $d(x, H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_{\varphi(n)}\|$, en déduire que $d(x, H) = \|x - a\|$

Partie II: Théorème de Riesz

On suppose dans cette partie que E est de dimension infinie et notons B sa boule unité fermée

5. On se propose de construire, par récurrence forte, une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de E tels que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \neq q, \|e_p - e_q\| \geq 1$$

- (a) Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Posons $e_0 = \frac{x}{\|x\|}$ et notons $H_0 = \text{Vect}(e_0)$.

- i. Soit $y \notin H_0$. Justifier que $\exists y_0 \in H_0$ tel que $d(y, H_0) = \|y - y_0\|$.

$$\text{Posons } e_1 = \frac{y - y_0}{\|y - y_0\|}.$$

- ii. Montrer que $d(e_1, H_0) = 1$, puis que $\|e_1 - e_0\| \geq 1$

- (b) Soit $n \geq 1$. Supposons qu'on a construit une famille $(e_0, \dots, e_n)$ d'éléments de B telle que

$$\forall (p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, p \neq q, \|e_p - e_q\| \geq 1$$

Soit $H_n = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.

- i. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in E \setminus H_n$ et l'existence d'un vecteur $x_{n+1} \in H_n$ tel que

$$d(x, H_n) = \|x - x_{n+1}\|$$

- ii. Soit $e_{n+1} = \frac{x - x_{n+1}}{\|x - x_{n+1}\|}$. Justifier que $e_{n+1} \in B$ puis montrer que $d(e_{n+1}, H_n) = 1$

- iii. Montrer que: $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \|e_p - e_{n+1}\| \geq 1$

- (c) Conclure

6. Montrer par l'absurde que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeurs d'adhérence dans B
7. Montrer le théorème de Riesz:

THÉORÈME

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

THÉORÈME DE RIESZ

Partie I: Distance à un sous-espace vectoriel de dim finie

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, le nombre $d(x, H) + \frac{1}{2^n}$ n'est pas minorant de l'ensemble $\{d(x, h) \mid h \in H\}$, donc il existe $x_n \in H$ tel que $\|x_n - x\| < d(x, H) + \frac{1}{2^n}$. Ainsi on obtient l'encadrement

$$d(x, H) \leq \|x_n - x\| < d(x, H) + \frac{1}{2^n}$$

La suite (x_n) est d'éléments de H et par le théorème des gendarmes $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, H)$

2. La suite $(\|x_n - x\|)$ est convergente, donc elle est bornée et, par suite, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x\| \leq M$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq M + \|x\|$$

Donc la suite (x_n) est bornée

3. La suite (x_n) est d'éléments de H et est bornée. Puisque H est de dimension finie alors, d'après le théorème de Bolzano Weierstrass, (x_n) admet une valeurs d'adhérence $a \in H$. Autrement-dit il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

4. La suite $(\|x_{\varphi(n)} - x\|)$ est extraite de la suite convergente $(\|x_n - x\|)$ vers $d(x, H)$, donc elle converge vers $d(x, H)$.

Puisque $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $x_{\varphi(n)} - x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - x$ et par continuité de la norme alors $\|x_{\varphi(n)} - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|a - x\|$. On déduit par unicité de la limite que $d(x, H) = \|x - a\|$

Partie II: Théorème de Riesz

5. (a) i. $H_0 = \text{Vect}(e_0)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, donc il existe $y_0 \in H_1$ tel que $d(y, y_0) = d(y, H_0)$

- ii. On a immédiatement $\|e_1\| = 1$ et donc $d(e_1, H_0) \leq 1$ car $0 \in H_0$

De plus, pour tout $x \in H_0$, on a:

$$\begin{aligned} \|e_1 - x\| &= \left\| \frac{y - y_0}{\|y - y_0\|} - x \right\| \\ &= \frac{\|y - (y_0 + \|y - y_0\| \cdot x)\|}{\|y - y_0\|} \end{aligned}$$

Avec $y_0 + \|y - y_0\| \cdot x \in H_0$, alors $\|e_1 - x\| \geq \frac{1}{\|y - y_0\|} \cdot d(y, H_0) = 1$. On Conclut donc $d(e_1, H_0) = 1$.

Finalement $e_0 \in H_1$, donc $\|e_1 - e_0\| \geq d(e_1, H_0) = 1$

- (b) i. On a $H_n \subsetneq E$ puisque H_n est de dimension finie et E ne l'est pas, donc il existe $x \in E \setminus H_n$. Pour un tel vecteur il existe $x_{n+1} \in H_n$ tel que

$$\|x - x_{n+1}\| = d(x, H_n) > 0$$

- ii. Posons $e_{n+1} = \frac{x - x_{n+1}}{\|x - x_{n+1}\|}$. On a immédiatement $\|e_{n+1}\| = 1$ et donc $d(e_{n+1}, H_n) \leq 1$ car $0 \in H_n$

De plus, pour tout $h \in H_n$, on a:

$$\begin{aligned} \|e_{n+1} - h\| &= \left\| \frac{x - x_{n+1}}{\|x - x_{n+1}\|} - h \right\| \\ &= \frac{\|x - (x_{n+1} + \|x - x_{n+1}\| \cdot h)\|}{\|x - x_{n+1}\|} \end{aligned}$$

Avec $x_{n+1} + \|x - x_{n+1}\| \cdot h \in H_n$, alors $\|e_{n+1} - h\| \geq \frac{1}{\|x - x_{n+1}\|} \cdot d(x, H_n) = 1$. On conclut donc $d(e_{n+1}, H_n) = 1$.

- iii. On a bien $d(e_{n+1}, H) = 1$, donc $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\|e_{n+1} - e_i\| \geq 1$ car $e_i \in H$

THÉORÈME DE RIESZ

(c)

6. Si la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans B , alors il existe une suite extraite $(e_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans B . Mais

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j, \|e_{\varphi(i)} - e_{\varphi(j)}\| \geq 1$$

Donc la suite $(e_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et, par suite, elle diverge

7. $\Rightarrow$) Dans un espace vectoriel normé de dimension finie la boule unité est formée bornée, donc elle est compacte
 $\Leftarrow$) Par contraposée, si l'espace est de dimension infinie, alors, d'après la question 5b, on peut construire une suite de la boule unité fermée qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. Donc B n'est compacte