

THÉORÈME DE STONE WEIERSTRASS

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré $\leq n$ par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On note par ailleurs $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et on fixe $\varepsilon > 0$

- Justifier l'existence d'un réel $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour couple $(x, y) \in [0, 1]^2$ vérifiant

$$|x - y| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des quantités suivantes :

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k}.$$

- Pour $x \in [0, 1]$, on pose $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n k r_k(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

- Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

- Pour $x \in [0, 1]$, on note $J(x) = \{0 \leq k \leq n; |k - nx| \leq n\eta_\varepsilon\}$. Prouver que :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \in J(x)}}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \varepsilon.$$

- Prouver que :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin J(x)}}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq 2M \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin J(x)}}^n \frac{(k - nx)^2}{n^2 \eta_\varepsilon^2} r_k(x),$$

puis que

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin J(x)}}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}.$$

- En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si f est continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
- Application:** Soit a, b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b x^n f(x) dx = 0$$

Montrer que f est nulle

THÉORÈME DE STONE WEIERSTRASS

1. Théorème de Heine
2. D'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

On dérive les deux membres de cette égalité par rapport à x , puis on multiplie par x :

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}.$$

De même, en dérivant deux fois :

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k} = n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}.$$

3. On spécialise les résultats précédents pour $y = 1 - x$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1$$

$$\sum_{k=0}^n k r_k(x) = nx,$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

On a de plus :

$$(k - nx)^2 = k(k-1) + k(1-2nx) + n^2x^2.$$

En reportant les calculs précédents, on trouve donc :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

4. Remarquons que

$$f(x) = f(x) \sum_{k=0}^n r_k(x) = \sum_{k=0}^n f(x) r_k(x).$$

On a donc :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

5. Si $|k - nx| \leq n\eta_\varepsilon$, on a en particulier :

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \eta_\varepsilon \implies \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

En utilisant que $\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1$, on en déduit le résultat.

6. Remarquons que si $|k - nx| \geq n\eta_\varepsilon$, on a alors

$$1 \leq \frac{(k - nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) &\leq \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} \sum_{k \in J(x)^c} (k - nx)^2 r_k(x) \\ &\leq \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 r_k(x) \\ &\leq \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} nx(1-x) \\ &\leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

THÉORÈME DE STONE WEIERSTRASS

où la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$.

7. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 4, on a l'inégalité

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

η_ε est donné par l'uniforme continuité. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour $n \geq n_0$ et $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \\ &\leq \underbrace{\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x)}_{\leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}} + \underbrace{\sum_{k \in J(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x)}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} + \varepsilon \sum_{k \in J(x)} r_k(x) \leq \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=0}^n r_k(x)}_{=1} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\forall n \geq n_0$, on a $\|f - B_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$.

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ vers f .

8. Posons $g(x) = f(a + (b-a)x)$, pour $x \in [0, 1]$. La suite (B_n) de polynômes de Bernstein associée à g converge uniformément vers g sur $[0, 1]$. Posons $Q_n(x) = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a, b]$. (Q_n) est encore une suite de fonctions polynomiales, et il est trivial de vérifier que (Q_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

9. Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a:

$$\int_a^b P(x) f(x) dx = 0$$

La fonction $\bar{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$ est elle aussi continue sur $[a, b]$. Donc, d'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $\bar{f}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, en écrivant

$$\left| |f(x)|^2 - f(x)P_n(x) \right| = \left| f(x) \left(\overline{f(x)} - P_n(x) \right) \right|$$

et il en résulte que la suite $(fP_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a, b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)P_n(x) dx$$

Donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[a, b]$ d'intégrale nulle, donc $|f| = 0$, ainsi la nullité de f