

TOPOLOGIE D'UNE CLASSE DE SIMILITUDE

Dans tout le problème

- n désigne un entier supérieur ou égal 2 ;
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- $M_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$;
- Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $S(M)$ formé de toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M . Ainsi $S(M) = \{PMP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{K})\}$
- π_A désignera le polynôme minimal de A et $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.

Partie I: Préliminaires

1. Justifier que l'application $\chi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{cases}$ est continue
2. En considérant la suite de terme général $M_k = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que l'application $\pi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ M & \longmapsto & \pi_M \end{cases}$ n'est pas continue
3. Montrer que les matrices d'une même classe de similitude ont les mêmes polynômes minimal et caractéristique
4. Montrer que $S(M) = \{M\}$ si, et seulement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Partie II: Classe de similitude n'est jamais ouvert

On se donne une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$

5. Quelle est la structure de $\mathcal{H} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(A) = \text{Tr}(M)\}$?
6. Montrer que la classe de similitude $S(M)$ de M est incluse dans $\mathcal{H}$
7. Montrer que $\mathcal{H}$ est d'intérieur vide et en déduire que $S(M)$ est aussi d'intérieur vide
8. Conclure qu'une classe de similitude $S(M)$ n'est jamais ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$

Partie III: Classe de similitude bornée

On se propose de montrer que la classe de similitude $S(M)$ est bornée si, et seulement, si M est une matrice scalaire

9. Justifier que la classe de similitude $S(\lambda I_n)$ d'une matrice scalaire est bornée
10. Inversement on se donne une matrice M telle que $S(M)$ soit bornée. On suppose par absurde que M n'est pas scalaire et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M

(a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre

(b) Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$

(c) Montrer que $S(M)$ n'est pas bornée. Conclure

11. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ qui soit invariante par similitude: c'est-à-dire

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \|PMP^{-1}\| = \|M\|$$

Caractériser les matrices M dont la classe de similitude est compact

Partie IV: Classe de similitude fermée

On se propose de montrer dans $M_n(\mathbb{C})$ que la classe de similitude $S(M)$ est fermée si et seulement si M est diagonalisable.

12. On se donne une matrice M diagonalisable

TOPOLOGIE D'UNE CLASSE DE SIMILITUDE

- (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que M et A sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal
- (b) En déduire que $S(M)$ est fermée
13. On prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on suppose que la classe $S(M)$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$
- (a) Justifier l'existence d'une matrice triangulaire supérieure $T = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartenant à $S(M)$
- (b) Soit $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ la matrice diagonale ayant $1, 2, \dots, n$ sur sa diagonale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer l'élément $[D^k T D^{-k}]_{i,j}$ d'indice (i, j) de la matrice $D^k T D^{-k}$ en fonction de i, j et $a_{i,j}$
- (c) Montrer que la suite $(D^k T D^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge lorsque k tend vers l'infini vers $\text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$
- (d) En déduire soigneusement que M est diagonalisable
14. **Exemple:** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$
- (a) Justifier que M est non diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
- (b) Montrer que la classe de similitude $S(M)$ est fermée dans $M_2(\mathbb{R})$. Conclure

Partie V: Matrice nulle adhérent à une classe de similitude

On se propose de montrer dans $M_n(\mathbb{K})$ qu'une matrice M est nilpotente si et seulement si la matrice nulle 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude $S(M)$ de M

15. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
- (a) Justifier que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) En s'inspirant de ce qui précède, construire une suite $(D^k T D^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers la matrice nulle. En déduire que la matrice nulle O_n est adhérent à $S(M)$
16. Inversement, on suppose que la matrice nulle O_n est adhérent à $S(M)$. Montrer que $\chi_M(X) = X^n$ et conclure que $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$



En cours

TOPOLOGIE D'UNE CLASSE DE SIMILITUDE