

COMPARAISON DES MODES DE CONVERGENCES

Dans tout le problème, $\sum_{n \geq 1} f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument sur I (**CA**) lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge.

Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions (f_n) sont bornées sur I .

- (a) Rappeler la définition de la convergence normale (**CN**) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur I .
(b) On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CN** sur I , démontrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CA** sur I .
- On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CN** sur I , démontrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CU** sur I .
- On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CS** puis **CU** sur $[0, 1]$ mais elle ne **CA** en aucune valeur de $[0, 1]$.
- Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolument sur I a-t-on nécessairement $\sum_{n \geq 1} f_n$ qui converge uniformément sur I ?

Indication On pourra considérer $\sum_{n \geq 1} f_n$, avec $f_n : x \in]-1, 1[\rightarrow x^n$.

Partie II

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels postifs, $I = [0, 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$.

- Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
- (a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$
(b) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ **CN** sur I si et seulement si, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.
- (a) Soit $x \in I$. Calculer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$
(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels postifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
(a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
(b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
(c) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
- Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple.

COMPARAISON DES MODES DE CONVERGENCES

Partie I

- (a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge sur $\mathbb{R}_+$, où $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
(pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur I , de manière à pouvoir parler de la norme infinie)

(b) $\forall x \in I$, $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I , la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument
- Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x , ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I , i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
- Pour x fixé dans $I = [0, 1]$, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, 1]$.
Le CSSA nous dit que, pour tout x de I , $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0, 1]$.
Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I .
- Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0, 1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I , la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0, 1[$.
Alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1 - \frac{1}{n}) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} \sim \frac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$ avec n . Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0, 1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I .

Partie II

- La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n$, $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leq x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
 $\forall n \geq 1, \forall x \in I$, $0 \leq \alpha_n x^n (1-x) \leq \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I .
- (a) $\forall x \in I$, $f'_n(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\frac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n(\frac{n}{n+1}) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

(b) $\|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. Donc

COMPARAISON DES MODES DE CONVERGENCES

$$\lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = e^{-1}.$$

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geq 0$ et donc, par comparaison de séries positives,

$$\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}$$

7. (a) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$

(b) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

Alors $\forall k \geq n+1$, $\alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

La suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend

pas de x et qui converge vers 0, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(c) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n , $\alpha_n \geq \ell > 0$.

Dans ces conditions pour tout x dans I , $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \geq \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.

Mais alors, $R_n(1 + \frac{1}{n+1}) \geq \ell(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\frac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.) donc ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I , si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

8. (a) Avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge)

(b) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

(c) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La suite définie par $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geq 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La fonction $g : x \rightarrow \frac{2}{x \ln(x)}$ décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive. La série $\sum_{n \geq 2} g(n)$ est donc de même nature

que l'intégrale $\int_2^\infty g(x) dx$. Or $\int_1^M g(x) dx = \int_1^M \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .

9. CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple ($\mathbb{R}$ est complet)

CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.

Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus :

CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue

Toutes les autres implications sont fausses.

