

DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN DE ζ

Notations : — On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Il est possible d'indexer la suite des nombres premiers p_i , $i = 1, 2, \dots$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$; ...

— Dans tout le problème la lettre p est réservée aux nombres premiers.

— Étant donné un réel x , sa partie entière $E(x)$ est l'entier n qui vérifie la double inégalité suivante : $n \leq x < n+1$.

— s désigne un réel strictement positif

— ζ désigne la fonction de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par: $\forall s \in]1, +\infty[, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Partie I: Développement eulérien et sommabilité

1. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Justifier la relation suivante $\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{ks}}$.

3. Soit $M_n = \left\{ \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \right\}$.

(a) Montrer que M_n est dénombrable

(b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\left(\frac{1}{m^s}\right)_{m \in M_n}$ est sommable et $\sum_{m \in M_n} \frac{1}{m^s} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}$

4. Pour tout $n \geq 2$, on pose f_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$ par la relation suivante $f_n(s) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}$. Soit N le rang du plus grand nombre premier inférieur à n ($N = \sup\{i | p_i \leq n\}$).

(a) Démontrer la relation suivante : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}$.

(b) Établir, lorsque le réel s est strictement supérieur à 1 ($s > 1$), l'encadrement ci-dessous

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

(c) En déduire, pour $s > 1$, la limite de l'expression

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$$

On écrit alors $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

5. (a) Déduire des résultats ci-dessus la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$

(c) Étudier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler

Partie II: Développement Eulérien de ζ et probabilité

Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose: $P_s(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On note ζ la fonction zeta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

6. Pour quelle(s) valeur(s) de λ , l'application P_s détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?

DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN DE ζ

On prend $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ et on considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P_s)$

7. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement: $A_m = m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$

Exprimer simplement la probabilité de l'événement A_m .

8. (a) Soit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ et $m = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_k)$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^k A_{n_i} = A_m$.

(b) Montrer que $(A_{p_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants

9. Soit C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun des nombres premiers p_i , pour $1 \leq i \leq n$

(a) Vérifier que $C_n = \bigcap_{i=1}^n A_{p_i}$, puis calculer et calculer $P_s(C_n)$ en fonction des $p_1, \dots, p_n$

(b) Vérifier $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n = \{1\}$ et que $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

(c) En déduire le développement eulérien de ζ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

On écrit alors

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

10. Montrer que la probabilité de l'événement « $n \in \mathbb{N}^*$ tel que aucun carré autre que 1 ne divise n » est $\frac{1}{\zeta(2s)}$



En cours

DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN DE ζ