

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + e^{nx}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{nx}}$

Partie I: Convergence, monotonie et convexité

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ puis déterminer le domaine de définition D de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$
2. Soit $a > 0$
 - (a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$
 - (b) La convergence de $\sum_{n \geq 0} f_n$ est-elle uniforme sur $]0, a]$
3. Prouver que f est continue sur D
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$
5. (a) Étudier la monotonie et la convexité de f_n sur D
(b) En déduire la monotonie et la convexité de f sur D

Partie II: Étude au voisinage de 0^+

6. Montrer que pour $x > 0$ l'application $\varphi_x : t \mapsto \frac{1}{1 + e^{tx}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{tx}} dt$
7. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$$
8. En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\mu}{x}$ où μ à déterminer
9. Tracer l'allure de la courbe de f

Partie III: Une autre expression de f

10. Montrer que la suite $((-1)^{k-1} e^{-n k x})_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable
11. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{e^{kx} - 1}$
12. Déterminer une valeur de n pour que $f(1) - \frac{1}{2} \simeq \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1}$ à 10^{-3} près

Partie IV: Régularité de f

13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} / pq = n\}$
 - (a) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$
 - (b) Déduire que $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n = \sum_{p|n} (-1)^{p-1}$
14. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(x) = \omega_n e^{-nx}$
 - (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 1} g_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$
 - (b) Montrer que f est de $\mathcal{C}^\infty$ sur D

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + e^{nx}}$

Partie I: Convergence, monotonie et convexité

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x \leq 0$, alors $f_n(x) \geq \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement ;
- Si $x > 0$, alors $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{nx}} \sim e^{-nx}$ et la SATP $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ est géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$, donc elle converge, alors par le critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge

Donc le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$

2. Soit a un réel strictement positif

- (a) Soit $x \in [a, +\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_n(x) \leq f_n(a)$. Or la série $\sum_{n \geq 0} f_n(a)$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, puis elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$
- (b) Comme $\|f_n\|_{\infty}^{[0, a]} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, a]$

3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc elle l'est sur $[a, b]$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

4. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$,

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le théorème d'interversion limite somme, f admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \frac{1}{2}$$

5. (a) Soit $n \geq 0$, la fonction f_n est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$f'_n(x) = \frac{-ne^{nx}}{(1 + e^{nx})^2} \leq 0 \quad \text{et} \quad f''_n(x) = \frac{n^2 e^{nx} (e^{nx} - 1)}{(1 + e^{nx})^3} \geq 0$$

Donc f_n est décroissante et convexe sur $]0, +\infty[$

- (b) — **Monotonie:** Soit $x, y \in]0, +\infty[$ tels que $x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(y) \leq f_n(x)$. Les deux séries $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 0} f_n(y)$ sont convergentes, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, soit $f(y) \leq f(x)$
- **Convexité:** Soit $x, y \in]0, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est convexe sur $]0, +\infty[$: elle vérifie alors l'inégalité de convexité, soit

$$f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y)$$

Les deux membres de cette inégalité sont les termes de deux séries convergentes, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) + (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y)$$

Soit

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

D'où f est convexe.

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + e^{nx}}$

Partie II: Étude au voisinage de 0^+

6. Soit $x > 0$.

— L'application $\varphi_x : t \mapsto \frac{1}{1 + e^{tx}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

— En $+\infty$: On a $\frac{1}{1 + e^{tx}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-tx} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{tx}} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1 + e^{-tx}} dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{(1 + e^{-tx})'}{1 + e^{-tx}} dt \\ &= -\frac{1}{x} [\ln(1 + e^{-tx})]_0^{+\infty} = \frac{\ln 2}{x} \end{aligned}$$

7. La fonction φ_x est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, alors pour $t \in [k, k+1]$, on a:

$$\varphi_x(t) \leq \varphi_x(k) \Rightarrow \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(k)$$

On somme ces inégalités de k allant de 0 à $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x)$$

De même pour $t \in [k-1, k]$, on a:

$$\varphi_x(k) \leq \varphi_x(t) \Rightarrow \varphi_x(k) \leq \int_{k-1}^k \varphi_x(t) dt$$

On somme ces inégalités de k allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_x(k) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$$

En ajoutant le terme manquant $\varphi_x(0) = \frac{1}{2}$ aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient

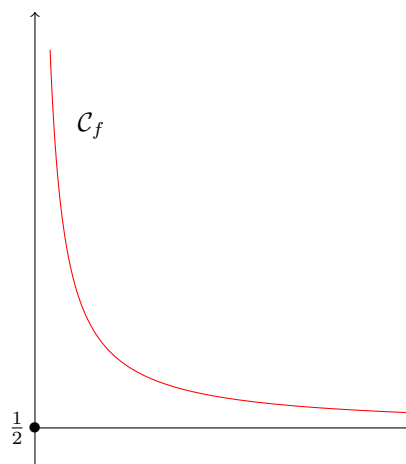
$$f(x) \leq \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$$

Ainsi l'encadrement demandé

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$$

8. D'après l'encadrement précédent on a: $\frac{\ln 2}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{x}$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}$

9. f est décroissante et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, alors l'allure de f est de la forme



ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + e^{nx}}$

Partie III: Une autre expression de f

Soit $x \in]0, +\infty[$.

10. — Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} e^{-n k x}$ est géométrique de raison $e^{-k x} \in]0, 1[$, donc elle converge

$$\text{de somme } T_k = \frac{e^{-k x}}{1 - e^{-k x}} \sim e^{-k x};$$

- La SATP $\sum_{k \geq 1} e^{-k x}$ est géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$ est convergente, et par le critère de comparaison

des SATP $\sum_{k \geq 1} T_k$ converge

D'où la sommabilité de la suite double $((-1)^{k-1} e^{-n k x})_{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

11. Par le théorème de Fubini

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-n k x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-n k x}$$

Avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-n x} \in]0, 1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-n k x} = - \sum_{k=1}^{+\infty} (-e^{-n x})^k = \frac{e^{-n x}}{1 + e^{-n x}} = \frac{1}{1 + e^{n x}}$$

En outre $\forall k \in \mathbb{N}^*, e^{-k x} \in]0, 1[$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-n k x} = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-k x})^n = (-1)^{k-1} \frac{e^{-k x}}{1 - e^{-k x}} = \frac{(-1)^{k-1}}{e^{k x} - 1}$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{n x}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{e^{k x} - 1}$$

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{n x}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + e^{-n x}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{e^{k x} - 1}$$

12. On a $f(1) - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1}$ est une série alternée vérifiant le critère spécial

des séries alternées donc $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1} - 1}$, donc il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{e^{n+1} - 1} \leq 10^{-3}$. la

valeur $n = 6$ répond à la question car $\frac{1}{e^7 - 1} \simeq 0,0009$, donc $\sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k-1}}{e^k - 1}$ est une valeur approchée de $f(1) - \frac{1}{2}$

à 10^{-3} près

Partie IV: Régularité de f

13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid pq = n\}$.

- (a) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément $(1, n) \in I_n$, donc $I_n \neq \emptyset$

— Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Si $(p, q) \in I_n \cap I_m$, alors $pq = m = n$, donc $m = n$. Absurde

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n \subset \mathbb{N}^{*2}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subset \mathbb{N}^{*2}$. Inversement si $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose $n = pqq$,

donc $(p, q) \in I_n$, ainsi $\mathbb{N}^{*2} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \mathbb{N}^{*2}$

On conclut que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + e^{nx}}$

(b) La suite double $((-1)^{q-1}e^{-pqx})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable, par le théorème de la sommation par paquets on a:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2} &= \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} (-1)^{q-1} e^{-pqx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} (-1)^{q-1} e^{-pqx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} (-1)^{q-1} e^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q|n} (-1)^{q-1} e^{-nx} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n = \sum_{q|n} (-1)^{q-1}$

14. Remarquons que pour $n \geq 1$, on a $|\omega_n| \leq n$

(a) L'application g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $g_n^{(p)}(x) = (-n)^p \omega_n e^{-nx}$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left| g_n^{(p)}(x) \right| = n^p |\omega_n| e^{-nx} \leq n^{p+1} e^{-na}$$

Par le critère de D'Alembert la série $\sum_{n \geq 1} n^{p+1} e^{-na}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} g_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

(b) On a

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$;
- La série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\forall p \geq 1, \sum_{n \geq 0} g_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$