

$$\text{ÉTUDE DE LA SÉRIE } \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$$

Notations : — Dans tout le problème α est un réel strictement positif.

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application u_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

Partie I: Fonction Zêta de Riemann

On note ζ la fonction Zêta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Soit $a > 1$

(a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

(b) A-t-on une convergence uniforme sur $]1, a]$?

2. Étudier la limite de ζ en $+\infty$

3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées k -ième

4. Soit $x \in]1, +\infty[$

(a) En utilisant la comparaison série-intégrale, montrer que: $0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-x} dt \leq \zeta(x)$

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$

(c) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ en 1

Partie II: Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$

5. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On note f_α sa somme

6. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$

7. Soit a un réel tel que $a > 0$.

Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

8. On suppose dans cette question que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

(a) Établir les inégalités: $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$ puis $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif

9. Calculer $f_1(1)$ et $f_2(1)$. (On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$)

10. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$

11. Montrer que $f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha + 1)}{x}$

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

Partie III: Régularité de f_α

12. Montrer que f_α est continue $]0, +\infty[$
13. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors f_α est continue $[0, +\infty[$
14. Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[1, +\infty[$ par: $\varphi_x(t) = \frac{x}{\sqrt{t}(1 + tx^2)}$
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
- $$\int_1^n \varphi_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)} \leq \frac{x}{1 + x^2} + \int_1^n \varphi_x(t) dt$$
- (b) Calculer l'intégrale $\int_1^n \varphi_x(t) dt$ (On pourra effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{t}$)
- (c) En déduire un équivalent simple de $f_{\frac{1}{2}}(x)$ lorsque x tend vers 0^+
15. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$
- (a) Montrer que $f_{\frac{1}{2}} \leq f_\alpha$
- (b) En déduire que f_α n'est pas continue en 0
16. Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'_α
17. Montrer que f_α est décroissante sur $[1, +\infty[$

Partie IV: Une autre expression sommatoire de f_α

18. Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrer que la suite double $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} \right)_{k \geq 1, n \geq 2}$ est sommable.
19. En déduire que
- $$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}}$$
20. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$, $v_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}}$
- (a) Montrer que v_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et calculer $v_k^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$
- (b) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$
21. Soit $x \in [1, +\infty[$
- (a) Montrer que la suite $\left(\frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}} \right)_{k \geq 1}$ est décroissante
- (b) En déduire que
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}} \right| \leq \frac{1}{(\alpha + n) x^{2n+1}}$$
- (c) Donner une valeur approchée de $f_2(2)$ à 10^{-2} près

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

Partie I: Fonction Zêta de Riemann

On note ζ la fonction Zêta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Soit $a > 1$

(a) Soit $x \in [a, +\infty[$, on a:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement

sur $[a, +\infty[$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[a, +\infty[$

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, a]$

2. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le théorème d'interversion limite somme, ζ admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

3. — Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

— La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ de somme ζ

— Soit $p \geq 1$ et $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$. En conséquence

$$|f_n^{(p)}(x)| = \frac{\ln^p(n)}{n^x} \leq \frac{\ln^p(n)}{n^a}$$

Pour $\alpha \in]1, a[$, on a $n^\alpha \cdot \frac{\ln^p(n)}{n^a} = \frac{\ln^p(n)}{n^{a-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, par le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln^p(n)}{n^a}$

converge. On en déduit la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ sur $[a, b]$, puis sa convergence uniforme sur $[a, b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}$, on a:

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$$

4. Soit $x \in]1, +\infty[$

(a) Soit $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissance sur $[1, +\infty[$, alors pour $t \in [n, n+1]$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^x} &\leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \implies \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} dt \\ &\implies \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

On somme ces inégalité de n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-x} dt \leq \zeta(x)$$

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

- (b) La valeur $\int_1^{+\infty} t^{-x} dt = \frac{1}{x-1}$ et l'inégalité précédente donnent $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$ et puisque $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$, alors $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$.
- (c) L'encadrement précédent donne $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$, et par le théorème des gendarmes $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$ c'est-à-dire $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

Partie II: Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

— Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)} \sim \frac{1}{x} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge, donc

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x) \text{ converge}$$

— Si $x = 0$, la série nulle $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$ converge

Donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

6. u_n est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \left(\frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)} \right)' \\ &= \frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)^2} \end{aligned}$$

Le signe de $u'_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $1 - nx^2$.

On obtient son tableau de variations et $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Ainsi $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_\infty$ converge si, et seulement, si

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge si, et seulement, si $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ si, et seulement, si $\alpha > \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$u'_n(x)$	+	0	-
u_n	0	$\frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$	0

7. Soit a un réel tel que $a > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \geq \frac{1}{a^2}$.

Soit $n \geq n_0$, l'application u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ et, par suite, pour tout $x \in [a, +\infty[$: $|u_n(x)| = u_n(x) \leq u_n(a)$. La série $\sum_{n \geq n_0} u_n(a)$ est convergente, d'où $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En outre la suite

$(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

8. On suppose dans cette question que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

(a) On a $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^\alpha (1 + kx^2)} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^\alpha (1 + kx^2)}$. Pour tout $k \in [n+1, 2n]$, on a $k^\alpha \leq (2n)^\alpha \leq \sqrt{2n}$

$$\text{ÉTUDE DE LA SÉRIE } \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$$

et, par suite, $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$ puis

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}\left(1 + \frac{2n}{n}\right)} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3\sqrt{2n}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$

(b) Pour tout $n \geq \frac{1}{a^2}$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, a]$ et $\left|R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$, donc $\|R_n\|_\infty^{[0,a]} \not\rightarrow 0$, en conséquence la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$

9. Par télescopage $f_1(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n}\right) = 1$.

Par la décomposition en éléments simples, on a $\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}$ et, par suite,

$$f_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \zeta(2) - 1$$

10. — La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$;

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

D'après le théorème d'interversion limite et somme $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

11. — Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a: $\left|\frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}\right| = \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$;

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

D'après le théorème d'interversion limite et somme $xf_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$, soit $f_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha+1)}{x}$

Partie III: Régularité de f_α

12. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $u_n : x \rightarrow \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

— Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 7 la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc elle l'est uniformément sur $[a, +\infty[$ puis en particulier sur $[a, b]$

Donc f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

13. Si $\alpha > \frac{1}{2}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $u_n : x \rightarrow \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

— D'après la question 6 la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc elle l'est uniformément sur $\mathbb{R}_+$

Donc f_α est continue $\mathbb{R}_+$

14. Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[1, +\infty[$ par:

$$\varphi_x(t) = \frac{x}{\sqrt{t}(1 + tx^2)}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application φ est continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$, on utilise les deux inégalités

$$\forall k \geq 1, \quad \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(k) \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, \quad \varphi_x(k) \leq \int_{k-1}^k \varphi_x(t) dt$$

On somme la première inégalité de k allant de 1 à n et la deuxième de k allant de 2 à n , on obtient

$$\int_1^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)} \leq \int_1^n \varphi_x(t) dt$$

Par transitivité, la première inégalité donne $\int_1^n \varphi_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)}$ et on ajoute le nombre $\varphi_x(1)$

aux deux membres de la deuxième inégalité, on aboutit à $\sum_{k=1}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)} \leq \frac{x}{1 + x^2} + \int_1^n \varphi_x(t) dt$.

Bref

$$\int_1^n \varphi_x(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{x}{\sqrt{k}(1 + kx^2)} \leq \frac{x}{1 + x^2} + \int_1^n \varphi_x(t) dt$$

(b) On effectue le changement de variable $u = x\sqrt{t}$. Alors $t = 1 \Rightarrow u = x$, $t = n \Rightarrow u = x\sqrt{n}$, $t = \frac{u^2}{x^2}$ et $dt = \frac{2u}{x^2} du$, par la formule de changement de variables, il vient

$$\begin{aligned} \int_1^n \varphi_x(t) dt &= \int_x^{x\sqrt{n}} \frac{x}{\frac{u}{x}(1 + u^2)} \cdot \frac{2u}{x^2} du \\ &= 2 \int_x^{x\sqrt{n}} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= 2 [\arctan(u)]_x^{x\sqrt{n}} \\ &= 2 (\arctan(x\sqrt{n}) - \arctan(x)) \end{aligned}$$

(c) Tout d'abord on fait tendre n vers l'infini, dans l'inégalité de 14a, on obtient l'encadrement

$$\pi - 2 \arctan(x) \leq f_{\frac{1}{2}}(x) \leq \frac{x}{1 + x^2} + \pi - 2 \arctan(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \pi - 2 \arctan(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + x^2} + \pi - 2 \arctan(x) = \pi$, alors $f_{\frac{1}{2}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \pi$

15. On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^\alpha \leq \sqrt{n}$, ce qui donne l'inégalité $\frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)} \leq \frac{x}{\sqrt{n} (1 + nx^2)}$, puis par sommation $f_{\frac{1}{2}}(x) \leq f_\alpha(x)$. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f_{\frac{1}{2}} \leq f_\alpha$

(b) Si f_α est continue en 0, alors on doit avoir $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(0) = 0$. Mais l'inégalité précédente donne

$$\pi = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_{\frac{1}{2}}(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x). \text{ Absurde}$$

16. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)^2}$$

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

— La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

— Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et soit $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \frac{nx^2 - 1}{n^\alpha (1 + nx^2)^2} \right| \leq \frac{nx^2 + 1}{n^\alpha (1 + nx^2)^2} \leq \frac{nb^2 + 1}{n^\alpha (1 + na^2)^2} \leq \frac{nb^2 + 1}{a^4 n^{\alpha+2}}$$

Comme $\frac{nb^2 + 1}{a^4 n^{\alpha+2}} \sim \frac{b^2}{a^4} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge ($\alpha > 0$), donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur le segment $[a, b]$, donc elle l'est uniformément

D'après le théorème de la dérivation terme à terme f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)^2}$$

17. Pour tout $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fraction $\frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)}$, dont le dénominateur positif et le numérateur négatif, est positive, donc $f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx^2}{n^\alpha (1 + nx^2)} \leq 0$, puis f_α est décroissante sur $[1, +\infty[$

Partie IV: Une autre expression sommatoire de f_α

18. — Soit $n \geq 2$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} = \sum_{k \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (nx^2)^k}$ converge car la série géométrique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(nx^2)^k}$, de raison $0 < \frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{2}$, converge

— $T_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha (nx^2)^k} = \frac{x}{n^\alpha (nx^2 - 1)} \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ et la série $\sum_{n \geq 2} T_n$ converge

Donc la suite double $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} \right)_{k \geq 1, n \geq 2}$ est sommable.

19. D'après le théorème de Fubini, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}}$. Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^{2k-1}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+\alpha}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^{2k-1}} (\zeta(\alpha + k) - 1)$$

D'autre part

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha} x^{2k-1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-x}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{nx^2} \right)^k = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-x}{n^\alpha} \frac{\frac{-1}{nx^2}}{1 + \frac{1}{nx^2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha (nx^2 + 1)} = f_\alpha(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$$

D'où la formule demandée

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}}$$

20. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$, $v_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k-1}}$

(a) v_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$, car il s'agit de la restriction d'une fraction rationnelle de pôle 0 sur $[1, +\infty[$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$, on a

$$v_k^{(p)}(x) = (-1)^{k+p-1} \frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!} \frac{\zeta(\alpha + k) - 1}{x^{2k+p-1}}$$

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$

(b) — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application v_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

— La série $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge simplement sur $]1, +\infty[$

— Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et soit $x \in [a, b]$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left| v_k^{(p)}(x) \right| = \frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!} \frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k+p-1}} \leq \frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!} \frac{\zeta(\alpha+k)-1}{a^{2k+p-1}} \sim \frac{(2k)^p}{a^{2k+p-1}} (\zeta(\alpha+k)-1)$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(2k)^p}{a^{2k+p-1}}$ converge, d'après le critère de D'Alembert,

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, $\sum_{k \geq 1} v_k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. Puis f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

21. Soit $x \in [1, +\infty[$

(a) Les deux suites $(\zeta(\alpha+k)-1)_{k \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{x^{2k-1}}\right)_{k \geq 1}$ de réels positifs sont décroissantes, donc $\left(\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\right)_{k \geq 1}$ est décroissante

(b) $\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, car $\zeta(\alpha+k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ et la suite $\left(\frac{1}{x^{2k-1}}\right)_{k \geq 1}$ est bornée, on déduit que la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}} \right| \leq \frac{1}{(\alpha+n)x^{2n+1}}$$

(c) D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| f_2(2) - \left(\frac{2}{5} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\zeta(2+k)-1}{2^{2k-1}} \right) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(2+k)-1}{2^{2k-1}} \right| \leq \frac{1}{(2+n)2^{2n+1}}$$

Pour $n=2$, on a $\frac{1}{(2+n)2^{2n+1}} = \frac{1}{128} \leq 10^{-2}$ et alors $\frac{2}{5} + \frac{\zeta(3)-1}{2} - \frac{\zeta(4)-1}{8} = \frac{1}{40} + \frac{4\zeta(3)-\zeta(4)}{8}$ est une valeur approchée de $f_2(2)$ à 10^{-2} près