

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

Partie I: La fonction Zéta de Riemann

Soit $n \geq 1$, on définit

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n^x} \end{cases}$$

On note ζ la fonction Zéta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ζ .
2. (a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.
(b) Y-a-t-il convergence uniforme sur $]1, +\infty[$.
(c) Étudier la continuité de ζ sur $]1, +\infty[$
3. (a) Vérifier que les fonctions f_n sont décroissantes
(b) Dédurre la monotonie de ζ
4. (a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$.
(b) Étudier la limite de ζ en $+\infty$
(c) En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$
5. (a) Vérifier que les fonctions f_n sont convexes
(b) Dédurre la convexité de ζ (Utiliser la définition de la convexité)
6. (a) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées k -ième
(b) Retrouver la monotonie et la convexité de ζ
(c) Tracer la courbe représentative de ζ

Partie II: Équivalents

7. En utilisant la comparaison avec une intégrale, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x > 1, \quad \frac{n^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{(n-1)^{1-x}}{x-1}$$

8. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ en 1
9. En utilisant la question 7, montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^{-x}$.
10. *Application :*

- (a) Donner la nature de la série $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1)$
- (b) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}_2^2}$ est sommable où $\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N}, \mid k \geq 2\}$
- (c) Dédurre la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1)$

Partie III: Développement asymptotique en 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $]0, +\infty[$ par $v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$.

11. Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

12. Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$
13. Exprimer, pour $x > 1$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.
14. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (on pourra utiliser le reste de la série).
15. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ : $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$.

Partie IV: Zéta alternée de Riemann

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $h_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

On note μ la fonction zeta alternée de Riemann, définie par $\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

16. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction μ
17. (a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$
- (b) La série $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge-t-elle normalement sur $]1, a]$ pour tout $a > 1$?
- (c) Montrer que $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$
- (d) La série $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, a]$ pour tout $a > 0$?
18. Justifier la continuité de μ sur $\mathbb{R}_+^*$
19. Déterminer la limite μ en $+\infty$
20. Soit a est un réel strictement positif
- (a) Justifier que h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 1} h_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
- (b) En déduire que μ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
21. Soit $x > 1$. Montrer que : $\mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
22. (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $\mu'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction μ , puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.
- (b) En déduire deux réels a et b , qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $\mu'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ : $\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1)$.
23. Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ , de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$.

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

Partie I: La fonction Zéta de Riemann

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$, donc $\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[$

2. (a) Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et $x \in [a, b]$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement

sur le segment $[a, b]$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[a, b]$

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$

(c) Pour tout $n \geq 1$, la suite f_n est continue sur $]1, +\infty[$ et la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$

3. (a) Soit $n \geq 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$

(b) Soit $x, y \in]1, +\infty[$ tels que $x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(y) \leq f_n(x)$. Les deux séries $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ et

$$\sum_{n \geq 1} f_n(y) \text{ sont convergentes, alors } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \text{ soit } \zeta(y) \leq \zeta(x)$$

4. (a) Soit $a > 1$ et $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement

sur $[a, +\infty[$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[a, +\infty[$

(b) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le théorème d'interversion limite somme, ζ admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

(c) La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est une fonction décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite L soit finie. Pour tout entier N et tout réel $x > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq \zeta(x) \leq L.$$

Pour N fixé, on fait tendre x vers 1, ce qui nous fournit l'inégalité $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq L$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs donc la suite de ces sommes partielles est croissante. L'inégalité précédente montre que cette suite est bornée donc elle converge, ce qui implique que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty.$$

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

5. (a) Soit $n \geq 1$, la fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = \frac{\ln^2(n)}{n^x} \geq 0$$

Ainsi f_n est convexe

- (b) Soit $x, y \in]1, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est convexe sur $]1, +\infty[$: elle vérifie alors l'inégalité de convexité, soit

$$f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y)$$

Les deux membres de cette inégalité sont les termes de deux séries convergentes, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) + (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y)$$

Soit

$$\zeta(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \zeta(x) + (1 - \lambda)\zeta(y)$$

D'où la convexité de ζ

6. (a) — Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

— La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ de somme ζ

— Soit $p \geq 1$ et $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$. En conséquence

$$\left| f_n^{(p)}(x) \right| = \frac{\ln^p(n)}{n^x} \leq \frac{\ln^p(n)}{n^a}$$

Pour $\alpha \in]1, a[$, on a $n^\alpha \cdot \frac{\ln^p(n)}{n^a} = \frac{\ln^p(n)}{n^{a-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, par le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln^p(n)}{n^a}$

converge. On en déduit la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ sur $[a, b]$, puis sa convergence uniforme

sur $[a, b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

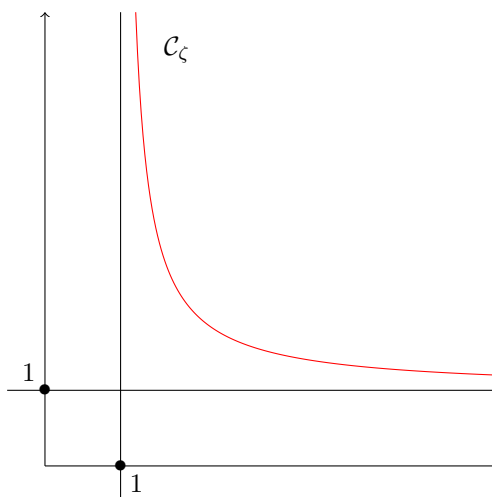
$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$$

- (b) ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x} < 0 \quad \text{et} \quad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^x} > 0$$

On en déduit la décroissance et la convexité de ζ

- (c)



FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

Partie II: équivalents

7. Soit $n \geq 2$ et $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissance sur $[1, +\infty[$, alors pour $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^x} &\leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} \implies \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^x} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^x} dt \\ &\implies \frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x} \end{aligned}$$

Ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt$$

ceci implique

$$\frac{(k+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{k^{1-x}}{1-x} \leq \frac{1}{k^x} \leq \frac{k^{1-x}}{1-x} - \frac{(k-1)^{1-x}}{1-x}$$

On somme ces inégalité de n à N et on tient compte des sommes télescopiques, on obtient

$$\frac{(N+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{n^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^x} \leq \frac{N^{1-x}}{1-x} - \frac{(n-1)^{1-x}}{1-x}$$

Puis on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient l'inégalité

$$\frac{n^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{(n-1)^{1-x}}{x-1}$$

8. On applique les inégalités précédentes avec $n = 2$, on obtient

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{x-1}$$

Puis, on ajoute 1 à chaque terme figurant dans les inégalités, alors

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} \implies x-1 + 2^{1-x} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$$

Or $x-1 + 2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$, alors $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$, soit $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

9. On applique les inégalités précédentes avec $n = 3$, on obtient

$$\frac{3^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{2^{1-x}}{x-1}$$

Puis, on multiplie chaque terme figurant dans les inégalités par 2^x , alors

$$3 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-x} \leq 2^x \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{2}{x-1}$$

Or $3 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{2}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, alors $2^x \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, soit $\zeta(x) - 1 - 2^{-x} = o(2^{-x})$. Ainsi

$$\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^{-x}$$

10. (a) Le terme général de cette série $\zeta(p) - 1 \sim \frac{1}{2^p}$, par la comparaison avec la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, la

série $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1)$ converge.

(b) Il s'agit d'une suite double de réels positifs

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

— Soit $n \geq 2$, la série $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{n^p}$ converge car il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{n} \in]0, 1[$ de somme

$$S_n = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)}$$

— La série $\sum_{n \geq 2} S_n$ converge car $S_n \sim \frac{1}{n^2}$, et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} S_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Donc la famille $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}_2^2}$ est sommable.

(c) D'après la question précédente la famille $\left(\frac{1}{n^p} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}_2^2}$ est sommable, on fait appel au théorème de Fubini ou d'interversion $\sum \sum$

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) &= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 \end{aligned}$$

Partie III: Développement asymptotique en 1

11. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit que : $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.

12. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\frac{1}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ converge (vers 0); comme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série

$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$ converge. De l'encadrement de la question précédente, on déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$.

13. Pour $x > 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$$

14. La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. On a :

$$0 \leq R_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$$

Ainsi, on déduit que $\sup_{x \in [1, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

15. Pour $x \in]1, +\infty[$, $v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right)$; $v_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.

v_n est continue, sauf peut-être en 1.

En 1 : en posant $h = x - 1$, $\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right) &= \frac{1}{h} \left(e^{-h \ln n} - e^{-h \ln(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left((1 - h \ln n + o(h)) - (1 - h \ln(n+1) + o(h)) \right) \\ &= \ln(n+1) - \ln n + o(1) \end{aligned}$$

Donc $v_n(x) = \frac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$ et, par suite, v_n est continue en 1.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1, +\infty[$. La convergence uniforme sur $[1, +\infty[$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) \right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ . D'où

$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ .

Partie IV: Zéta alternée de Riemann

16. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant; donc la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

17. (a) Soit $a > 1$ et $x \geq a$, alors pour tout $n \geq 1$, $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^a}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est indépendante de x et convergente, la série $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(b) On a $\|h_n\|_{\infty}^{[1,a]} = \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, donc $\sum_{n \geq 1} h_n$ ne converge pas normalement sur $]1, a]$.

(c) Soit $a > 0$ et $x \geq a$. La série $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ est alternée vérifiant le CSSA, alors

$$|R_n(x)| \leq |h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

Donc $\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|h_n\|_{\infty}^{[0,a]} = 1 \not\rightarrow 0$, d'après la condition nécessaire, la série $\sum_{n \geq 1} h_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, a]$

18. — $\sum_{n \geq 1} h_n$ est une série de fonctions continues sur $]0, +\infty[$

— Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, alors pour tout $x \in [a, b]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée vérifiant le CSSA, alors

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

Donc $\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ou encore $\sum_{n \geq 1} h_n$ CU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

Donc la fonction $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

19. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que, pour $n = 1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$$

20. (a) — Pour tout $n \geq 1$, la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$
— Soit $p \geq 0$. Le résultat est déjà démontré pour $p = 0$, alors on suppose désormais que $p \geq 1$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $h_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{p+n-1} \ln^p(n)}{n^x}$.

Pour x et p fixés, on considère la fonction φ définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{\ln^p(t)}{t^x}$.
 φ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et

$$\varphi'(t) = \frac{p - x \ln(t)}{t^{x+1}} \ln^{p-1}(t)$$

Donc φ' est négative sur l'intervalle $[e^{\frac{p}{x}}, +\infty[$ et positive sur $[1, e^{\frac{p}{x}}]$. Donc φ est décroissante sur $[e^{\frac{p}{x}}, +\infty[$ et croissante sur $[1, e^{\frac{p}{x}}]$.

On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln^p(n)}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $N_a = E(e^{\frac{p}{a}}) + 1$; donc la série alternée $\sum_{n \geq N_a} h_n^{(p)}(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n , $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+p} \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup_{x \geq a} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} h_n^{(p)}$ CU sur $[a, +\infty[$.

- (b) • Pour tout $n \geq 1$, la fonction h_n est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$;
• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 1} h_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, μ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \mu^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+p-1} \frac{\ln^p(n)}{n^x}$$

21. Pour $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(x) - \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} \\ &= -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x} \zeta(x) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité : $\mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

22. (a) On pose $h = x - 1$. Comme μ est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(1) + h\mu'(1) + o(h) \\ &= \ln 2 + (x-1)\mu'(1) + o(x-1) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} 1 - 2^{1-x} &= 1 - e^{-h \ln 2} \\ &= h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2) \\ &= (x-1) \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} (x-1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

(b)

$$\begin{aligned}
 \zeta(x) &= \frac{\mu(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + h\mu'(1) + o(h)}{h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)} \\
 &= \frac{1}{h \ln 2} \frac{\ln 2 + h\mu'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2}h + o(h)} \\
 &= \frac{1}{h \ln 2} (\ln 2 + h\mu'(1) + o(h)) \left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h)\right) \\
 &= \frac{1}{h \ln 2} \left(\ln 2 + h \left(\mu'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right) \\
 &= \frac{1}{h} + \left(\frac{\mu'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)
 \end{aligned}$$

23. Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de la question 15.) les égalités $a = 1$ et $\frac{\mu'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $\mu'(1) = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après 20b.), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -\mu'(1) = \ln 2 \left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right)$.