

ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

Partie I: Préliminaire

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1. Fonction Gamma d'Euler

(a) Soit $x \in]0, +\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$

(b) Déterminer, pour $x \in]0, +\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n .

2. Fonction zêta de Riemann

On rappelle que la fonction zêta est définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connaît $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous. On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.

(a) On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$$

Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$

(b) On fixe l'entier $p \geq 2$ et un réel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon$

(c) Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} pres.

Partie II: Suites de fonctions

Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :

THÉORÈME : TH 1

si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$, alors, la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \geq 0}$ converge vers le réel $\int_a^b f(x) dx$

On commencera par donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ juste en énonçant un théorème.

4. Exemples et contre-exemples

(a) Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0, 1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)$

ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x) dx$ Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées

(b) Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x) dx$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0, 1]$.

ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

5. Cas d'un intervalle quelconque

- (a) Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $I = [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle I non borné.

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

- (b) Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I .

On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f continue sur I .

- Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x \in I$, $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I .
- Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x) dx\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x) dx$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I .

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

THÉORÈME : TH 2

si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in I$: $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x) dx\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x) dx$

- Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I .
- Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} dx$

Partie III: Séries de fonctions

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :

THÉORÈME : TH 3

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$, alors,

la série de réels $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

8. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :

ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

THÉORÈME : TH 4

Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(x)| dx$ converge, alors f est intégrable sur I , la série $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

On suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n$ est une série de réels absolument convergente.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx$ comme la somme d'une série numérique.

9. Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

(a) Montrer que, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

(b) Montrer que, pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

(c) Montrer que, néanmoins, $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 (-1)^n x^n dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n dx$$

10. Théorème de convergence monotone

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I .

On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I .

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que : la série $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

11. Généralisation

(a) Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ et une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt$

ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Partie I: Préliminaire

1. Fonction Gamma d'Euler

- (a) Pour tout $x > 0$, la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part, on sait que $\forall x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, donc $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison avec une fonction de Riemann intégrable sur $[1, +\infty[$ on en déduit que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Au voisinage de 0, $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann intégrable sur $]0, 1]$ on en déduit que f est intégrable sur $]0, 1]$. On peut donc conclure que: f est intégrable sur $]0, +\infty[$

- (b) $x > 0$ entraîne $x+1 > 0$ et par intégration par parties on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$