

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

Partie I: Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que g est dérivable et exprimer g' .
3. On note : $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.
Montrer que $g'(x) = -2f'(x).f(x)$.
4. Intégrant l'expression précédente, calculer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.
5. Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.
En déduire la valeur de l'intégrale I .

Partie II: Propriétés de la fonction Γ

On définit la fonction Γ par $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

7. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.
En déduire que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
8. (a) Préciser le signe de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
9. (a) Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(b) En déduire une expression simple de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
10. (a) En utilisant le changement de variable $s \mapsto s^2$. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$.
11. (a) Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$.
(b) En déduire que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
12. (a) Montrer que Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Montrer que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.
(c) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, puis en déduire l'existence d'un unique réel strictement positif x_0 tel que $\Gamma'(x_0) = 0$.
(d) Étudier les variations de Γ et la nature de la branche infinie en $+\infty$.
Donner une allure de son graphe.

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

Partie III: Fonction Γ et fonction β d'Euler

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge et notons $J_n(x)$ sa valeur
14. On pose $u_n(t) := \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$
- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, u_n(t) \leq e^{-t}$
- (b) En déduire que: $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(x)$
15. Pour a et b , réels strictement positifs, on pose $\beta(a, b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt$
- (a) Justifier l'existence de $\beta(a, b)$.
- (b) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \beta(n+1, x)$
16. (a) Simplifier $\beta(a+1, b) + \beta(a, b+1)$
- (b) Prouver que $\beta(a, b+1) = \frac{b}{a} \beta(a+1, b)$
- (c) En déduire $\beta(a+1, b)$ en fonction de $\beta(a, b)$
17. Prouver que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

Partie I: Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Posons $h : (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \mapsto h(x, t) = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2 + 1}$.
- $\forall t \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+$
 - $\forall x \in \mathbb{R}_+$, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est C^0 sur $[0, 1]$
 - $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ qui est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable

On en déduit que l'application $g : x \mapsto \int_0^1 h(x, t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

2. On remarque que $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$. Cette fonction est bien définie pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$

- $\forall t \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est C^0 sur $[a, b]$
- $\forall x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est C^0 sur $[0, 1]$
- $\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2x \leq 2b = \psi(t)$ qui est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable

On en déduit que l'application $g : x \mapsto \int_0^1 h(x, t) dt$ est de classe C^1 sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+$. De plus

$$\forall x \geq 0, g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-(t^2+1)x^2} dt$$

3. Posons $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$. f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x) = e^{-x^2}$.

D'autre part, avec le changement de variable $u = xt$, on a

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Finalement: $g'(x) = -2f'(x)f(x)$

4. On a donc $g'(x) = -(f^2)'(x)$ donc par intégration, il existe une constante K telle que $\forall x \geq 0, g(x) = -f^2(x) + K$. Pour $x = 0$ on obtient en particulier ,

$$g(0) = K = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement $g(x) = -\left(\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2 + \frac{\pi}{4}$

5. Soit (x_n) une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Posons $f_n(t) = \frac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2 + 1}$

- la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ fonction intégrable sur $[0, 1]$

On en déduit grâce au **théorème de convergence dominée** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2 + 1} \right) dt = 0$$

Puis, par la **caractérisation séquentielle de la limite**, on obtient bien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2 + 1} dt = 0$$

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

6. On en déduit, de la question précédente, que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \text{ d'où}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Partie II: Propriétés de la fonction Γ

On définit la fonction Γ par $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. Le problème se pose alors en 0 et $+\infty$.

- **Au voisinage de 0:** On a $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ donc intégrable si, et seulement, si $1-x < 1$ si, et seulement, si $0 < x$.

- **Au voisinage de $+\infty$:** On a $t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable en $+\infty$.

On déduit que $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement, si $x > 0$.

8. (a) Γ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$

(b) Pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \geq e^{-1} \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{ex}$$

$$\text{Or } \frac{1}{ex} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$$

9. (a) $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et le produit $t \mapsto t^x e^{-t}$ admet des limites nulles en 0 et en $+\infty$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

(b) Par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

10. (a) En utilisant le changement de variable $s \mapsto s^2$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$

- Pour $n = 0$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

- Soit $n \geq 0$, on suppose que $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$. On a:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

11. (a) Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

- En $+\infty$: $(\ln t)^k t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $h(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- En 0: Pour $\delta \in]1-x, 1[$, $t^\delta h(t) \sim t^{\delta+x-1} (\ln t)^k \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc $h(t) = o\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$

Ceci prouve la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ donc $\forall x, t > 0$, $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$.

Soit $0 < a < b$. L'application $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$ est continue sur $[a, b] \times]0, +\infty[$.

On a $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right| \leq |\ln t|^n (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$ (Condition de domination) avec $t \mapsto |\ln t|^n (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc l'application Γ est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$, $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$.

12. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$, d'où la convexité stricte de Γ
- (b) On a $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.
On déduit qu'au voisinage de 0 : $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.
- (c) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Les conditions du théorème de Rolle sont vérifiées, d'où l'existence d'un réel strictement positif $x_0 \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Or la fonction Γ' est strictement croissante, donc l'unicité de x_0
- (d) Soit $a > 1$. On a

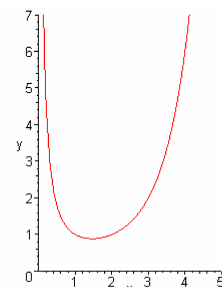
$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\geq \int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\geq a^{x-1} \int_a^{+\infty} e^{-t} dt \\ &\geq a^{x-1} e^{-a} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

On déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \Gamma(x-1) = +\infty$$

Par conséquent Γ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.



Partie III: Fonction Γ et fonction β d'Euler

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, n]$. En 0, on a $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ qui a une intégrale convergente car $x > 0$. Donc $J_n(x)$ converge
14. On pose $u_n(t) := \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$
- (a) Pour $t \in [0, n]$, on a $u_n(t) = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})}$. On utilise l'inégalité de Bernoulli pour $s > -1$: $\ln(1+s) \leq s$ pour obtenir $u_n(t) \leq e^{-t}$. Lorsque $t > n$, on a $u_n(t) = 0 \leq e^{-t}$

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

- (b) Posons $\varphi_n : t \mapsto u_n(t)t^{x-1}$. La suite (φ_n) , des fonctions continues par morceaux sur $]0, +\infty[$, converge simplement vers l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. D'après la question précédente:

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad |\varphi_n(t)| \leq t^{x-1}e^{-t}$$

Où $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc, d'après le TCVD, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(x)$

15. Pour a et b , réels strictement positifs, on pose $\beta(a, b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt$

- (a) $t \mapsto (1-t)^{a-1} t^{b-1}$ est positive et continue sur $]0, 1[$.

- En 0: $(1-t)^{a-1} t^{b-1} \sim t^{b-1}$ qui est intégrable car $b > 0$
- En 1: $(1-t)^{a-1} t^{b-1} \sim (1-t)^{a-1}$ qui est intégrable car $a > 0$

D'où l'existence de cette intégrale.

- (b) Avec le changement $s = tn$, on obtient

$$\begin{aligned} n^x \beta(n+1, x) &= n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt \\ &= \int_0^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n s^{x-1} ds \\ &= J_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \beta(n+1, x)$

16. (a) On a:

$$\begin{aligned} \beta(a+1, b) + \beta(a, b+1) &= \int_0^1 \left((1-t)^a t^{b-1} + (1-t)^{a-1} t^b \right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \beta(a, b) \end{aligned}$$

- (b) Par intégration par parties $\beta(a, b+1) = \frac{b}{a} \beta(a+1, b)$

- (c) On déduit $\beta(a+1, b) \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \beta(a, b)$ donc $\beta(a+1, b) = \frac{a}{a+b} \beta(a, b)$

17. On a $\beta(n+1, x) = \frac{n}{n+x} \beta(n, x)$. Par récurrence, on obtient

$$\beta(n+1, x) = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} \beta(1, x)$$

avec $\beta(1, x) = \frac{1}{x}$ d'où le résultat