

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On notera indifféremment P pour désigner un polynôme ou la fonction polynomiale associée

Partie I: Polynômes et nombres de Bernoulli

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t) dt = 0$$

2. On peut donc définir une unique suite de polynômes $(B_p)_p$ déterminée par $B_0 = 1$ et telle que pour $p \geq 1$

$$B'_p = pB_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(t) dt = 0.$$

Les B_p s'appellent les polynômes de Bernoulli.

On pose $\beta_p = B_p(0)$. La suite de réels $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la suite des nombres de Bernoulli.

- Calculer B_1 , B_2 et B_3 , ainsi que les nombres β_1, β_2 et β_3 .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de B_n ?
 - Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$
 - Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \beta_{n-k} X^k$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que $C_n = B_n$
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_{2n+1} = 0 = B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$
4. (a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme B_{2n+1} ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$
- (b) En déduire que les polynômes $B_{2n} - \beta_{2n}$ sont de signes constants sur $[0, 1]$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Montrer que: $\beta_{2n} = \frac{-1}{(n+1)(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n-2} C_{2n+2}^k \beta_k$
6. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a: $B_n(x) = 2^{n-1} \left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$
- (b) En déduire une relation entre $B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ et β_{2n} .
- (c) Montrer que $\max_{t \in [0,1]} |B_{2n}(t)| = |\beta_{2n}|$
7. Montrer, par récurrence, que $\forall n \geq 1: B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$
8. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - \beta_{p+1})$
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 3$. Montrer la formule de Faulhaber

$$p \sum_{k=1}^n k^{p-1} = n^p + \frac{p}{2} n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k \beta_{p-k} n^k$$

Partie II: Fonction Zéta de Riemann et nombres de Bernoulli

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in]0, 1[$: $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi_n : t \mapsto \frac{B_n(t) - \beta_n}{\sin(\pi t)}$ sur $]0, 1[$.
Montrer que φ_n est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$
12. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\int_0^1 f(t) \sin(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
13. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$
- (a) Trouver une relation entre $I_{n+2,k}$ et $I_{n,k}$
 - (b) En déduire, selon la parité de n , l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k
14. Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$. On pose $J_{n,N} = \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt$
- (a) En utilisant la question 10, trouver une expression de $J_{n,N}$ en fonction de n , N et β_{2n}
 - (b) En déduire la valeur de $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ en fonction de n et β_{2n}
 - (c) En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$
15. Montrer que $\zeta(2n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et en déduire $\beta_{2n} \sim 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$

Partie III: Formule d'Euler-MacLaurin

16. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[n, n+1]$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pose
- $$T_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_n^{n+1} f^{(k)}(t) B_k(t-n) dt \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée } k\text{-ième de } f$$
- (a) Exprimer T_0 en fonction de T_1 , puis, pour tout entier $k \geq 1$, T_k en fonction T_{k+1}
 - (b) En déduire que: $\int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{f(n+1) + f(n)}{2} + \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^{k-1} \beta_k}{k!} (f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n)) - T_p$
17. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^{2p}([a, b], \mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule d'Euler-MacLaurin:

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(t) dt + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) - R_p$$

avec $R_p = \frac{1}{(2p)!} \int_a^b f^{(2p)}(t) B_{2p}(t - E(t)) dt$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Partie IV: Application

18. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z \neq 1$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité:

$$\frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} z^{2k} - \frac{z^{2n+1}}{e^z - 1} \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} e^{tz} dt$$

19. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 2\pi$. Montrer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

Partie I: Polynômes et nombres de Bernoulli

1. — **Existence:** Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose

$$Q = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C \text{ où } C \text{ est une constante. On a bien } Q'P \text{ et}$$

$$\int_0^1 Q(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} + C$$

On pose $C = -\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$ et Q répond à la question

- **Unicité:** Si Q_1 et Q_2 répondent à la question, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $Q_1 = Q_2 + C$. Comme

$$\int_0^1 Q_1(t) dt = \int_0^1 Q_2(t) dt = 0$$

On trouve $C = 0$ et $Q_1 = Q_2$, d'où l'unicité

2. (a) $B_1 = X - \frac{1}{2}$, $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ et $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{1}{6} \text{ et } \beta_3 = 0$$

- (b) On montre par récurrence sur n que $\deg B_n = n$;

- (c) Pour $n \geq 2$, on a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$$

- (d) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

— Pour $n = 0$, $B_0 = \sum_{k=0}^0 C_n^k \beta_{n-k} X^k = \beta_0 = 1$ est vraie

— Soit $n \geq 0$, supposons que $B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \beta_{n-k} X^k$. Par définition B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$ de terme constant β_{n+1} :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \beta_{n+1} + \int_0^x (n+1)B_n(t) dt \\ &= \beta_{n+1} + \int_0^x (n+1) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \beta_{n-k} t^k \right) dt \\ &= \beta_{n+1} + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \beta_{n-k} t^k \right) dt \\ &= \beta_{n+1} + \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \beta_{n-k} x^{k+1} \\ &= \beta_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \beta_{n+1-k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \beta_{n+1-k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \beta_{n+1-k} x^k \end{aligned}$$

Récurrence achevée

3. (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

— $C_0 = B_0$

— Soit $n \geq 0$, supposons que $C_n = B_n$. On a

$$C'_{n+1} = (-1)^{n+2} B'_{n+1} (1-X) = (-1)^n (n+1) B_n (1-X) = (n+1) C_n = (n+1) B_n = B'_{n+1}$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $C_{n+1} = B_{n+1} + C$. Mais par le changement de variables $u = 1 - t$, donne

$$\int_0^1 C_{n+1}(t) dt = \int_0^1 C_{n+1}(1-u) du = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du = 0$$

Donc $C = 0$ et, par suite, $C_{n+1} = B_{n+1}$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = -B_{2n+1}(\frac{1}{2})$ donc $B_{2n+1}(\frac{1}{2})$ est nul. C'est vrai aussi pour $n = 1$ d'après l'expression de B_1 .

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$ qui se combine avec $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$ pour donner $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0$.

4. (a) On raisonne par récurrence.

— Pour $n = 0$, $B_1 = X - \frac{1}{2}$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

— Soit $n \geq 1$, supposons que B_{2n+1} s'annule en c avec $0 < c < \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de Rolle à B_{2n+1} entre 0 et c puis entre c et $\frac{1}{2}$, on prouve l'existence de racines d et d' de B_{2n} telles que $0 < d < c < d' < \frac{1}{2}$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à B_{2n} entre d et d' . Cela entraîne l'existence d'une racine u de B_{2n-1} entre d et d' donc telle que $0 < u < \frac{1}{2}$.

(b) Montrons maintenant que $B_{2n} - \beta_{2n}$ garde un signe constant sur $[0, 1]$ c'est à dire que 0 et 1 sont des extréma globaux de B_{2n} sur $[0, 1]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $B_{2n}(x) - B_{2n}(0)$ est du signe de B_{2n-1} pour $n \geq 2$ et $0 < x < \frac{1}{2}$. Par symétrie (question 3a), on peut écrire

$$\forall x > \frac{1}{2}, \quad B_{2n}(x) - B_{2n}(0) = B_{2n}(x) - B_{2n}(1) + \underbrace{B_{2n}(1) - B_{2n}(0)}_{=0} = B_{2n}(1-x) - B_{2n}(0)$$

donc le signe est le même que dans la première moitié de l'intervalle.

5. Soit $n \geq 2$, d'après la question précédente, $B_{2n+2}(1) = (-1)^{2p+2} B_{2n+2}(0) = \beta_{2n+2}$. En utilisant ensuite la relation 1 avec $x = 1$, et la symétrie des coefficients binômiaux :

$$B_{2n+2}(1) = \sum_{k=0}^{2n+2} C_{2n+2}^k \beta_{2n+2-k} = \sum_{k=0}^{2n+2} C_{2n+2}^k \beta_k$$

En sortant de la somme les termes correspondant aux indices $k = 2p - 1, 2p, 2p + 1$ et $2p + 2$, on trouve que

$$\begin{aligned} \beta_{2n+2} &= \sum_{k=0}^{2n-2} C_{2n+2}^k \beta_k + C_{2n+2}^{2n-1} \beta_{2n-1} + C_{2n+2}^{2n} \beta_{2n} + C_{2n+2}^{2n+1} \beta_{2n+1} + C_{2n+2}^{2n+2} \beta_{2n+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} C_{2n+2}^k \beta_k + C_{2n+2}^{2n} \beta_{2n} + \beta_{2n+2} \end{aligned}$$

En effet, les nombres β_{2n-1} et β_{2n+1} sont nuls d'après la question précédente. Les nombres β_{2n+2} s'éliminent et puisque $C_{2n+2}^{2n} = C_{2n+2}^2 = (n+1)(2n+1)$, on en tire l'égalité demandée

6. (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

— Pour $n = 0$, rien à démontrer

— Soit $n \geq 0$. Supposons $B_n = 2^{n-1} \left[B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right]$.

Posons $Q = 2^n \left[B_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right) \right]$ et calculons Q'

$$\begin{aligned} Q' &= 2^n \left[\frac{1}{2} B'_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + \frac{1}{2} B'_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= (n+1) 2^n \left[B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= (n+1) B_n = B'_{n+1} \end{aligned}$$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $Q = B_{n+1} + C$. Mais en effectuant les changement de variables $u = \frac{t}{2}$ et $v = \frac{t+1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(t) dt &= 2^n \left[\int_0^1 B_{n+1} \left(\frac{t}{2} \right) dt + \int_0^1 B_{n+1} \left(\frac{t+1}{2} \right) dt \right] \\ &= 2^{n-1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} B_{n+1}(u) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_{n+1}(v) dv \right] \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $C = 0$ et $Q = B_{n+1}$

Ceci achève la récurrence

(b) On remplace x par 0 dans l'égalité $B_{2n} = 2^{2n-1} \left[B_{2n} \left(\frac{x}{2} \right) + B_{2n} \left(\frac{x+1}{2} \right) \right]$, on obtient

$$\beta_{2n} = 2^{2n-1} \left[\beta_{2n} + B_{2n} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \Rightarrow B_{2n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1 - 2^{2n-1}}{2^{2n-1}} \beta_{2n}$$

(c) Les extremums de B_{2n} sont atteints soit en $t = 0$, soit en $t = \frac{1}{2}$

7. Par récurrence sur n

- Pour $n = 1$, on a $B_1(X+1) - B_1(X) = X+1 - \frac{1}{2} - X + \frac{1}{2} = 1 = 1X^0$
- Soit $n \geq 1$, supposons que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Intégrons la relation due à l'hypothèse de récurrence entre 0 et x :

$$\int_0^x B_n(t+1) dt - \int_0^x B_n(t) dt = n \int_0^x t^{n-1} dt$$

Avec le changement de variable $u = t+1$ dans la première intégrale dans le premier membre, on obtient

$$\int_1^{x+1} B_n(t) dt - \int_0^x B_n(t) dt = x^n$$

Soit, par la relation de Chasles,

$$x^n = \int_x^{x+1} B_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_x^{x+1} B'_{n+1}(t) dt = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x))$$

D'où $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ et puisque cette relation est vraie pour tout réel x , on en déduit l'égalité entre polynômes.

8. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$k^p = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k))$$

On somme ces égalités de k allant de 0 à n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^p &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^n B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) \\ &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)) \\ &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - \beta_{p+1}) \end{aligned}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 3$. D'après la question précédente

$$p \sum_{k=1}^n k^{p-1} = B_p(n+1) - \beta_p = B_p(n) + pn^{p-1} - \beta_p$$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On fait appel à la question 2d, on a $B_p(n) = \sum_{k=0}^p C_p^k \beta_{p-k} n^k$ et on sort de la somme les termes correspondant aux indices $k = 0, p$ et $p-1$, on obtient

$$\begin{aligned} p \sum_{k=1}^n k^{p-1} &= pn^{p-1} + C_p^p \beta_0 n^p + C_p^{p-1} \beta_1 n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k \beta_{p-k} n^k \\ &= pn^{p-1} + n^p - \frac{p}{2} n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k \beta_{p-k} n^k \\ &= n^p + \frac{p}{2} n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k \beta_{p-k} n^k \end{aligned}$$

Partie II: Fonction Zéta de Riemann et nombres de Bernoulli

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$, D'après la formule d'Euler $\cos(2k\pi t) = \frac{e^{i2k\pi t} + e^{-i2k\pi t}}{2}$ et si $2k\pi t \not\equiv 0[2\pi]$, $e^{i2\pi t} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) &= \sum_{k=-n}^n e^{i2k\pi t} = \sum_{k=-n}^n (e^{i2\pi t})^k \\ &= e^{-i2n\pi t} \frac{e^{i(2n+1)2\pi t} - 1}{e^{i2\pi t} - 1} \\ &= \frac{e^{i(2n+1)\pi t} - e^{-i(2n+1)\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}} \\ &= \frac{2i \sin((2n+1)\pi t)}{2i \sin(\pi t)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \end{aligned}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\varphi_n : t \mapsto \frac{B_n(t) - \beta_n}{\sin(\pi t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.

L'application φ_n admet un développement limité à l'ordre 1 en 0: $\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi} B'_n(0) + \frac{1}{2\pi} B''_n(0) + o(t)$ et elle admet aussi un développement limité à l'ordre 1 en 1: $\varphi_n(t) = -\frac{1}{\pi} B'_n(1) - \frac{1}{2\pi} B''_n(1) + o(t-1)$. Donc elle est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$

12. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt \right| &= \frac{1}{x} \left| -[\cos(xt)f(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t) \cos(xt) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left(|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \right). \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^1 f(t) \sin(xt) dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

13. (a) Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Deux nouvelles intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}
 I_{n+2,k} &= \int_0^1 B_{n+2}(t) \cos(2k\pi t) dt = \int_0^1 B_{n+2}(t) \left(\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right)' dt \\
 &= \underbrace{\left[B_{n+2}(t) \left(\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right) \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{2k\pi} \int_0^1 B'_{n+2}(t) \sin(2k\pi t) dt \\
 &= -\frac{n+2}{2k\pi} \int_0^1 B_{n+1}(t) \sin(2k\pi t) dt = \frac{n+2}{2k\pi} \int_0^1 B_{n+1}(t) \left(\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right)' dt \\
 &= \frac{n+2}{4k^2\pi^2} [B_{n+1}(t) \cos(2k\pi t)]_0^1 - \frac{n+2}{4k^2\pi^2} \int_0^1 B'_{n+1}(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{n+2}{4k^2\pi^2} \underbrace{(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0))}_{=0} - \frac{n+2}{4k^2\pi^2} \int_0^1 (n+1)B_n(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= -\frac{(n+2)(n+1)}{4k^2\pi^2} \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= -\frac{(n+2)(n+1)}{4k^2\pi^2} I_{n,k}
 \end{aligned}$$

(b) On calcule $I_{2,k}$ et $I_{1,k}$. On a

$$\begin{aligned}
 I_{2,k} &= \int_0^1 B_{n+2}(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{2k\pi} \left([B_2(t) \sin(2k\pi t)]_0^1 - \int_0^1 B'_2(t) \sin(2k\pi t) dt \right) \\
 &= -\frac{2}{2k\pi} \int_0^1 B_1(t) \sin(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{2}{2k\pi} \int_0^1 B_1(t) \left(\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi} \right)' dt \\
 &= \frac{2}{(2k\pi)^2} \left([B_1(t) \cos(2k\pi t)]_0^1 - \int_0^1 B'_1(t) \cos(2k\pi t) dt \right) \\
 &= \frac{2}{(2k\pi)^2} \left(B_1(1) - B_1(0) - \int_0^1 B_0(t) \cos(2k\pi t) dt \right) \\
 &= \frac{2}{(2k\pi)^2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_{1,k} &= \int_0^1 B_1(t) \cos(2k\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{2k\pi} \left([B_1(t) \sin(2k\pi t)]_0^1 - \int_0^1 B'_1(t) \sin(2k\pi t) dt \right) \\
 &= -\frac{2}{2k\pi} \int_0^1 B_0(t) \sin(2k\pi t) dt = 0
 \end{aligned}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{2n,k} = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}$ et $I_{2n+1,k} = 0$

14. Soit $n, N \in \mathbb{N}$. On pose

$$J_{n,N} = \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt$$

(a) Soit $t \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2n}(t) \sin((2N+1)\pi t) &= (B_{2n}(t) - \beta_{2n}) \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \\
 &= (B_{2n}(t) - \beta_{2n}) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) \right)
 \end{aligned}$$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

Une telle relation reste valable pour $t = 0$ et $t = 1$, en conséquent

$$\begin{aligned} J_{n,N} &= \int_0^1 (B_{2n}(t) - \beta_{2n}) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) \right) dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 B_{2n}(t) dt}_{=0} + \int_0^1 2 \sum_{k=1}^n B_{2n}(t) \cos(2k\pi t) dt - \beta_{2n} + \beta_{2n} \underbrace{\int_0^1 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) dt}_{=0} \\ &= -\beta_{2n} + 2 \sum_{k=1}^N I_{2n,k} \\ &= -\beta_{2n} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2k\pi)^{2n}} \end{aligned}$$

(b) L'application φ_{2n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, d'après la question 12, $J_{n,N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et on en déduit

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} \beta_{2n}}{2(2n)!} \text{ ou encore}$$

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} \beta_{2n}}{2(2n)!}$$

(c) — $\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2 \beta_2}{2(2)!} = \frac{\pi^2}{6}$

— La relation de la question 5 donne $\beta_4 = \frac{-1}{3 \times 5} (C_6^0 \beta_0 + C_6^1 \beta_1 + C_6^2 \beta_2) = \frac{-1}{30}$ et, par suite, $\zeta(4) = \frac{-(2\pi)^4 \beta_4}{2(4)!} = \frac{\pi^4}{90}$

15. — Pour $n \geq 1$, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \frac{1}{k^{2n}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{2n-1}} - \frac{1}{k^{2n-1}} \right)$$

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on a

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \frac{1}{2n-1} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(k-1)^{2n-1}} - \frac{1}{k^{2n-1}} \right) = \frac{1}{2n-1}$$

Ou encore $0 \leq \zeta(2n) - 1 \leq \frac{1}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\zeta(2n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

— On a $\zeta(2n) \sim 1$ et $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} \beta_{2n}}{2(2n)!}$, donc

$$\beta_{2n} \sim 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

Partie III: Formule d'Euler-MacLaurin

16. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[n, n+1]$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pose

$$T_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_n^{n+1} f^{(k)}(t) B_k(t-n) dt$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de f

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

(a) — Par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
 T_0 &= - \int_n^{n+1} f(t) B_0(t-n) dt \\
 &= - \int_n^{n+1} f(t) B_1'(t-n) dt \\
 &= - [f(t) B_1(t-n)]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} f'(t) B_1(t-n) dt \\
 &= B_1(0)f(n) - B_1(1)f(n+1) + T_1 \\
 &= - \frac{f(n) + f(n+1)}{2} + T_1
 \end{aligned}$$

— Soit $k \geq 1$, on a $\beta_{k+1} = B_{k+1}(1) = B_{k+1}(0)$ et par une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
 T_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_n^{n+1} f^{(k)}(t) B_k(t-n) dt \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_n^{n+1} f^{(k)}(t) \left(\frac{B_{k+1}(t-n)}{k+1} \right)' dt \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left([f^{(k)}(t) B_{k+1}(t-n)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f^{(k+1)}(t) B_{k+1}(t-n) dt \right) \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left(f^{(k)}(n+1) B_{k+1}(1) - f^{(k)}(n) B_{k+1}(0) \right) + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)!} \int_n^{n+1} f^{(k+1)}(t) B_{k+1}(t-n) dt \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \beta_{k+1} \left(f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(n) \right) + T_{k+1}
 \end{aligned}$$

(b) Par une sommation par paquets on a $-T_0 = T_1 - T_0 + \sum_{k=2}^{p-1} (T_k - T_{k-1}) - T_p$, avec $T_1 - T_0 = \frac{f(n) + f(n+1)}{2}$ et

pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ on a $T_k - T_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \beta_k (f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n))$. En outre $-T_0 = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

On combine ces égalités

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+1} f(t) dt &= -T_0 = T_1 - T_0 + \sum_{k=2}^p (T_k - T_{k-1}) - T_p \\
 &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^{k-1} \beta_k}{k!} \left(f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n) \right) - T_p
 \end{aligned}$$

17. Soit $n \in \llbracket a, b-1 \rrbracket$ et soit $k \in \llbracket 2, 2p \rrbracket$, on a $\beta_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+1} f(t) dt &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{2p} \frac{(-1)^{k-1} \beta_k}{k!} \left(f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n) \right) - T_{2p} \\
 &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{2k-1} \beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n+1) - f^{(2k-1)}(n) \right) - T_{2p} \\
 &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n+1) - f^{(2k-1)}(n) \right) - T_{2p}
 \end{aligned}$$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On somme de n allant de a à $b-1$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \sum_{n=a}^{b-1} \int_n^{n+1} f(t) dt \\ &= \sum_{n=a}^{b-1} \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \sum_{n=a}^{b-1} \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n+1) - f^{(2k-1)}(n) \right) - \sum_{n=a}^{b-1} T_{2p} \\ &= \sum_{n=a}^{b-1} \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \sum_{n=a}^{b-1} \left(f^{(2k-1)}(n+1) - f^{(2k-1)}(n) \right) - \sum_{n=a}^{b-1} T_{2p} \\ &= \sum_{n=a}^b f(n) - \frac{f(a) + f(b)}{2} - \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) - \sum_{n=a}^{b-1} T_{2p} \end{aligned}$$

Soit

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(t) dt + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) + \sum_{n=a}^{b-1} T_{2p}$$

Avec

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b-1} T_{2p} &= - \sum_{n=a}^{b-1} \frac{1}{(2p)!} \int_n^{n+1} f^{(2p)}(t) B_{2p}(t-n) dt \\ &= - \sum_{n=a}^{b-1} \frac{1}{(2p)!} \int_n^{n+1} f^{(2p)}(t) B_{2p}(t-E(t)) dt \\ &= - \frac{1}{(2p)!} \int_a^b f^{(2p)}(t) B_{2p}(t-E(t)) dt \\ &= -R_p \end{aligned}$$

D'où la formule d'Euler-Maclaurin:

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(t) dt + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) - R_p$$

$$\text{avec } R_p = \frac{1}{(2p)!} \int_a^b f^{(2p)}(t) B_{2p}(t-E(t)) dt$$

Partie IV: Application

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : t \in [0, 1] \mapsto \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, alors on applique la formule d'Euler-Maclaurin

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) - \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(t) B_{2n}(t-E(t)) dt$$

Avec

$$\begin{aligned} - \frac{f(0) + f(1)}{2} &= \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}; \\ - \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \frac{ze^{tz}}{e^z - 1} dt = \left[\frac{e^{tz}}{e^z - 1} \right]_0^1 = 1 \\ - \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: f^{(2k-1)}(t) &= \frac{z^{2k} e^{tz}}{e^z - 1}, \text{ alors } f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) = \frac{z^{2k} e^z}{e^z - 1} - \frac{z^{2k}}{e^z - 1} = z^{2k} \\ - f^{(2n)}(t) &= \frac{z^{2n+1} e^{tz}}{e^z - 1} \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(t) B_{2n}(t-E(t)) dt &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 \frac{z^{2n+1} e^{tz}}{e^z - 1} B_{2n}(t) dt \\ &= \frac{z^{2n+1}}{e^z - 1} \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} e^{tz} dt \end{aligned}$$

LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On combine ces égalités $\frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} z^{2k} - \frac{z^{2n+1}}{e^z - 1} \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} e^{tz} dt$

19. On montre que $\frac{z^{2n+1}}{e^z - 1} \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} e^{tz} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après la question 6c, on a $\max_{t \in [0,1]} |B_{2n}(t)| = |\beta_{2n}|$ et $\max_{t \in [0,1]} |e^{tz}| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, alors

$$\left| \frac{z^{2n+1}}{e^z - 1} \int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!} e^{tz} dt \right| \leq \frac{|z|^{2n+1}}{|e^z - 1|} \frac{|\beta_{2n}|}{(2n)!} e^{\operatorname{Re}(z)} \sim \frac{2|z| e^{\operatorname{Re}(z)}}{|e^z - 1|} \left(\frac{|z|}{2\pi} \right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\beta_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} z^{2k} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1$