

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

Dans tout le problème :

- $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
- On désigne alors par $\sum_{n \geq 0} a_n$ la série numérique de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite :
 $(\mathcal{P}_1)$: La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.
 $(\mathcal{P}_2)$: La fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I: Généralités

1. En utilisant des développements en série entière " usuels ", donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que:
 - (a) $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - (b) $(a_n)_{n \geq 0}$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 - (c) $(a_n)_{n \geq 0}$ ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 - (d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $] -1, 1[$ (justifier).
2. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est absolument convergente; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. Dédurre de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$
Indication: On pourra utiliser une décomposition en éléments simples

Partie II: Théorème d'Abel

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.
 On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).
 On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.
 - (a) Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.
 - (b) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$
 - (c) Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que :
 pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1[$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.
 - (d) Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

5. Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?
6. **Application:** Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction arctan puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.
7. **Produit de Cauchy:** On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

(a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

Indication: On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ pour $n \geq 1$

(b) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on

suppose que les trois séries $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ et $\sum_{n \geq 0} w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Partie III: Réciproque du théorème d'Abel

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.
9. Dans cette question on suppose que pour tout entier $n, a_n \geq 0$.
Montrer que si $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie (P_2) , alors elle vérifie la propriété (P_1) .

Indication: On pourra montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Partie IV: Théorème tauberien faible

On suppose dans cette partie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

10. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq \frac{K}{n}.$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum_{k=0}^n a_k$.

Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

12. (a) Justifier l'existence, pour tout entier naturel n , de $M_n = \sup_{k \geq n} (|ka_k|)$.

(b) Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

13. Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, |u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^n |a_k| (1 - x^k) + \frac{1}{n(1-x)} M_n$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, |u_n| \leq |L - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + \frac{1}{n(1-x)} M_n.$$

14. On prend $x_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant tout ce qui précède, prouver alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

15. Conclure que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge

Partie V: Une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2 y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

16. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Donner les domaines de convergence des séries obtenues.

17. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E) .

Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

18. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$.

(a) Déterminer les constantes α et β telles que

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{\alpha}{2n - 1} + \frac{\beta}{2n + 1}.$$

- (b) Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ et $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$.

Montrer que $h(u) = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

- (c) En déduire une expression simple de $H(x)$.

On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

- (d) En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

- (e) Calculer la valeur de $L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$.

19. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Calculer, à l'aide des résultats précédents, la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

20. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$. Prouver que $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$. Conclure.

Partie VI: Séries harmonique transformées

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood suivant:

THÉORÈME : de Littlewood

Si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

21. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

22. Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
23. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.
24. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.
25. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?
26. Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est périodique de période 6 avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ (il est demandé de détailler les calculs).

Partie VII: Divergence sur le bord

On suppose dans cette question que $\forall n \geq 0 : a_n > 0$ et la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $\lambda_n = \frac{b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

27. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
28. Montrer que g est définie sur $] -1, 1[$
29. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \geq 0$ tels que

$$|g(x) - \lambda f(x)| \leq \varepsilon f(x) + M \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

30. Montrer que $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \lambda$

31. Application:

- (a) Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n + \sin n}$

- (b) Donner un équivalent en 1 de la fonction g définie sur $] -1, 1[$ par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n + \sin n}$

Partie VIII: Théorème de Liouville

Soit $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme h et soit $r < R$.

32. Montrer que, pour tout entier k , la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
33. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$2\pi r^k c_k = \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

34. **Application :** On suppose que $R = +\infty$ et que h est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que h est constante.

Partie I: Généralités

1. (a) Il suffit de considérer $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$
- (b) Il suffit de considérer $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$
- (c) Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- (d) Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, car $\|x^n\|_{\infty}^{[-1,1]} = 1 \not\rightarrow 0$
2. La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$, donc sa somme est continue sur $[0, 1]$ C'est du cours!
(on dispose ici de la convergence normale de la série sur $[0, 1]$...)
3. Pour $x \in]-1, 1[$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= x \ln(1+x) + [\ln(1+x) - x] \end{aligned}$$

Comme la question précédente s'applique, on en déduit: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2 \ln 2 - 1$.

Partie II: Théorème d'Abel

4. (a) Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = R_n(x)$$

- (b) On travaille sur les sommes partielles:

$$\sum_{p=1}^k (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum_{p=1}^k r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^k r_{n+p} x^{n+p}$$

après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient:

$$\sum_{p=1}^k (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p} x^{p-1} - r_{n+k} x^{n+k}$$

le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la relation voulue.

- (c) Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 pour tout $k \geq n_0$ on ait $|r_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; alors on a bien $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq n_0$ et p entier naturel. Et pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq n_0$ on obtient:

$$|R_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$$

- (d) Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$.

5. Par contraposition, la série est divergente.

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

6. Par primitivation du développement de $\frac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1, 1[$; et

l'on peut appliquer le théorème d'Abel pour obtenir: $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

7. (a) La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici: $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{(k(n-k))^{1/4}} = (-1)^n a_n$. (poser $u_0 = v_0 = 0$)

Or $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ (étude des variations, ou mieux: $(n-2k)^2 \geq 0$) et par conséquent $a_n \geq \frac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

(b) Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a: $U(x)V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$. Mais d'après le théorème d'Abel appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

Partie III: Réciproque du théorème d'Abel

8. C'est la question 1.b) !

9. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$;

en outre, la fonction f est croissante sur $[0, 1[$, d'où $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

On a donc: $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

Partie IV: Théorème de Tauber et Littlewood faible

10. Par hypothèse, la suite (na_n) converge, elle est donc bornée, d'où l'existence de K .

11. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1[$, j'ai

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = L - u_n + \sum_{k=0}^n a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

d'où le résultat.

12. (a) Par définition de K , pour tout n , l'ensemble $\mathcal{E}_n = \{|ka_k|, k \geq n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par K . Elle admet donc une borne supérieure.

(b) Par hypothèse, (ka_k) converge vers 0 ; pour $\varepsilon > 0$ fixé on dispose donc de N tel que : $\forall k \geq N, |ka_k| \leq \varepsilon$, d'où par définition de la borne supérieure, $\forall n \geq N, 0 \leq M_n \leq \varepsilon$. On vient de vérifier la définition de la limite $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

13. Par définition de M_n , On a : $\forall k \geq n, |a_k| \leq \frac{M_n}{k} \leq \frac{M_n}{n}$, d'où, connaissant la somme d'une série géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{M_n}{n} \cdot \frac{1}{1-x}$$

d'où la première majoration. Ensuite, on utilise l'identité

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, 1 - x^k = (1-x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leq (1-x) \cdot k$$

d'où la seconde majoration.

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

14. D'après les résultats précédents, avec $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \left| L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |ka_k| + M_n$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du majorant ci-dessus tend vers 0 d'après (ii), le second l'est également puisque $na_n = o(1)$ donc $\sum_{k=0}^n ka_k = o(n)$ et le troisième aussi d'après la question précédente. En conclusion $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

15. Par définition de $(u_n)_{n \geq 0}$, nous venons de montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et a pour somme L , autrement-dit que f peut se prolonger au segment $[0, 1]$ avec $f(1) = L$, ce qui fait que f est alors continue à gauche en 1. Ainsi f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

Partie V

16. Il s'agit de séries géométriques :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

En outre si $x \notin]-1, 1[$ ces deux séries divergent grossièrement, le "domaine" de convergence est donc $]-1, 1[$.

17. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r = \min(1, R)$. J'ai pour tout x de $]-r, r[$

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \quad \text{et} \quad \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

d'où, par unicité du développement en série entière, y est solution de (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 4n(n-1)a_n + 4na_n - a_n = 1$$

soit si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Ainsi $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$ est la seule solution développable en série entière possible de (E). Or cette série entière a un rayon de convergence égal à 1 (pour x non nul fixé, la règle de d'Alembert montre que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$).

18. (a) Il vient

$$\forall n \geq 1, \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1} = \frac{2n(\alpha + \beta) + \alpha - \beta}{4n^2 - 1},$$

donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$ conviennent.

(b) Il est immédiat que le rayon de convergence de la série entière définissant h vaut 1. Donc h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et il vient

$$\forall u \in]-1, 1[, h'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right),$$

d'où, en intégrant, vu que $h(0) = 0$, alors $\forall u \in]-1, 1[, h(u) = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

(c) Soit $x \in I$ et $u = \sqrt{x}$. On peut écrire $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{u} h(u)$ d'où

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$$

(d) Toutes les séries entières utilisées ayant un rayon de convergence égal à 1, on a grâce à une réindexation

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \right)$$

soit

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \frac{1}{2} (1 + (x-1)H(x))$$

d'où grâce au résultat précédent

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$$

(e) Pour l'étude au voisinage de 1, on réécrit

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} (1-\sqrt{x}) \ln(1-\sqrt{x})$$

où la seule forme indéterminée (lorsque x tend vers 1) est du type $t \ln t$, qui tend vers 0 lorsque $t = 1 - \sqrt{x}$ tend vers 0. D'où $L = \frac{1}{2}$.

19. On a $na_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (a_n) vérifie $na_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc appliquer le résultat de la partie 1 à la fonction $f : x \mapsto -1 + \varphi(x)$ (ne pas oublier a_0 !). Nous avons vu alors que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et a pour somme $-1 + L$. Ainsi $S = -\frac{1}{2}$.

20. Par réindexation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right),$$

d'où après simplifications

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Par conséquent $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, et je retrouve (en ajoutant le terme $a_0 = -1$!) $S = -\frac{1}{2}$.

Partie VI: Séries harmoniques transformées

21. Les deux séries ont même rayon de convergence car l'une est la dérivée de l'autre en outre (ε_n) est bornée et ne tend pas vers 0, donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ vaut 1

22. Effectivement, on peut écrire $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ pour $x \in]-1, 1[\dots$ et appliquer le théorème de Littlewood précédemment admis pour la réciproque du théorème d'Abel.

23. Soit $x \in]-1, 1[$, on a:

$$x^p g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_{k-p} x^{k-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_k x^{k-1} = g(x) - \sum_{k=1}^p \varepsilon_k x^{k-1}$$

$$\text{Par conséquent, } g(x) = \frac{\sum_{k=1}^p \varepsilon_k x^{k-1}}{1 - x^p}.$$

AUTOUR DES SÉRIES ENTIÈRES

24. $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt$ diverge quand x tend vers 1 ; tandis que $\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2} dt$ tend vers $\ln 2 \dots$
25. On est bien mis sur la voie par la question précédente: 1 étant racine simple du dénominateur de $g(x)$, il faut et il suffit que 1 soit racine du numérateur pour que l'intégrale soit convergente. (dans ce cas, g est prolongeable par continuité en 1) Une CNS est donc: $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i = 0$.
- Cela ne peut pas se produire lorsque p est impair!
26. On a ici: $g(x) = \frac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} = \frac{(1+x+x^2)(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)} = \frac{1+x}{1+x^3} + \frac{x^2}{1+x^3}$;
- on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$. La première intégrale (abélienne) vaut:
- $$\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{u^2 + 3/4} du = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{u^2 + 3/4} du = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$
- Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{\ln 2}$.

Partie VII: Divergence sur le bord

27. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$;
- en outre, la fonction f est croissante sur $[0, 1[$, d'où $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
- On a donc: $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.
28. La suite $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ est convergente, donc elle est bornée ou encore $b_n = O(a_n)$. Or $R_c\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right) \geq 1$, donc
- $$R_c\left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n\right) \geq R_c\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right) \geq 1, \text{ ce qui montre que } g \text{ est définie sur }]-1, 1[$$
29. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]0, 1[$. La suite $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ tend vers λ , alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on a $\left|\frac{b_n}{a_n} - \lambda\right| \leq \varepsilon$, soit $|b_n - \lambda a_n| \leq \varepsilon a_n$. D'autre part $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ est bornée donc il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \leq C$. Enfin on prend $M = C + |\lambda|$ et il vient

$$\begin{aligned} |g(x) - \lambda f(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - \lambda a_n) x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n - \lambda a_n| x^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n - \lambda a_n| x^n + \sum_{n=0}^N |b_n - \lambda a_n| x^n \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^N (|b_n| + |\lambda| a_n) x^n \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + M \sum_{n=0}^N a_n x^n \\ &\leq \varepsilon f(x) + M \sum_{n=0}^N a_n x^n \end{aligned}$$

30. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n$, alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{n=0}^N a_n x^n}{f(x)} = 0$, donc il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in]\delta, 1[: \left| \frac{M \sum_{n=0}^N a_n x^n}{f(x)} \right| \leq \varepsilon. \text{ Donc pour un tel que } x \in]\delta, 1[, \text{ on a bien}$$

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \lambda \right| \leq 2\varepsilon$$

Ceci montre que $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \lambda$

31. **Application:**

$$(a) \text{ On a } \frac{1}{n + \sin n} \sim \frac{1}{n} \text{ et } R_c \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \right) = 1, \text{ donc } R_c \left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n + \sin n} \right) = 1$$

$$(b) \text{ D'après ce qui précède } g(x) \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Partie VIII: Théorème de Liouville

32. Puisque $r < R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum_{n \geq 0} |c_n| r^n$ est convergente. Puisque $|c_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |c_n| r^n$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0, 2\pi]$.

33. On a

$$h(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_{n \geq 0} c_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$

Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve

$$\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n \geq 0} c_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

La dernière intégrale est égale à 0 si $k \neq n$, et à 2π sinon. On en conclut que

$$\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi c_k r^k.$$

34. Pour $k \geq 1$, on a

$$c_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta.$$

Soit $M > 0$ tel que $|h(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$

Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_k = 0$ pour $k \geq 1$, ce qui entraîne que h est constante.