

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

On pose pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$

PROBLÈME 1: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

Dans cette partie, z un nombre complexe tel que $|z| < 2$ et $(u_{n,p})$ est une famille de nombres complexes définie pour n et p entiers naturels, $n \geq 2$, $p \geq 2$ par $u_{n,p} = \frac{z^n}{p^n}$.

L'objectif de cette partie est de calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

1. (a) Justifier que, pour tout $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} u_{n,p}$ est absolument convergente et calculer $S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{p^n} \right|$
 (b) En déduire que la famille $(u_{n,p})_{n \geq 2, p \geq 2}$ de nombres complexes est sommable.
2. (a) Démontrer que $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) z^n$
 (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

PROBLÈME 2: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$

On rappelle que $\forall x \in]-1, 1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.

Dans ce problème on calcule la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

1. (a) Montrer que $x_{n-1} - x_n \sim \frac{1}{2n^2}$
 (b) En déduire que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel γ
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.
3. On considère la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$.
 (a) Justifier que, pour tout $n \geq 2$, la série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{kn^k}$ est absolument convergente;
 (b) Vérifier que $S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$
 (c) En déduire que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable. .
4. Montrer que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) = \gamma$.

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

PROBLÈME 3: Calcul de trois sommes $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2}$, $\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}$ et $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

Dans cette partie on se propose de calculer les trois sommes

$$A = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2}, B = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2} \text{ et } C = \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

On considère la suite double $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ et les ensembles

$$I = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p \text{ divise } q\}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p \wedge q = n\} \text{ et } I_n = \{(p, np) \mid p \in \mathbb{N}^*\}$$

- Montrer que $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et calculer $A = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2}$
- Justifier que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in I}$ est sommable;
 - Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de I ;
 - Par le théorème de la sommation par paquets calculer $\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}$.
- Vérifier que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{(p,q) \in J_1} \frac{1}{p^2 q^2}$;
 - Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;
 - Déduire la valeur de la somme $C = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$

PROBLÈME 4: Sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On propose d'étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.

- On suppose, dans cette question, que la famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable
 - Donner un équivalent de $\frac{1}{a^n + b^m}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis de $\frac{1}{a^n + b^m}$ lorsque $m \rightarrow +\infty$ (discuter selon les valeurs de a et b).
 - En déduire que $a > 1$ et $b > 1$.
- On suppose que $a > 1$ et $b > 1$. On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}$
 - Montrer majoration de $\frac{1}{a^n + b^m} \leq \frac{1}{2} \alpha^n \beta^m$
 - Etudier la sommabilité de $(\alpha^n \beta^m)$ puis conclure.

PROBLÈME 5: Étude d'une sommabilité

On considère la suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$, définie par: $u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\beta}$

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

1. Montrer que si $\alpha \leq 1$ ou $\beta \leq 1$, alors $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

On suppose dans ce qui suit que $\alpha > 1$ et $\beta > 1$

2. Soit $p \geq 1$ fixé. Montrer que la série $\sum_{q \geq 1} u_{p,q}$ est convergente. On note $X_p = \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$

3. On considère la fonction $\varphi_p : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{1}{p^\alpha + t^\beta} \end{cases}$.

(a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi_p(t) dt$, puis montrer que

$$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t) dt \leq X_p \leq \int_0^{+\infty} \varphi_p(t) dt$$

(b) En déduire que:

$$\frac{1}{p^\gamma} \int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t) dt \leq X_p \leq \frac{1}{p^\gamma} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt$$

Où γ est une constante que l'on déterminera.

4. Conclure que $X_p \sim \frac{C}{p^\gamma}$, où C est une constante à préciser

5. Étudier la sommabilité de la famille

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

PROBLÈME 1: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

1. (a) Soit $p \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} \left| \frac{z^n}{p^n} \right|$ est géométrique de raison $\left| \frac{z}{p} \right| < 1$, donc elle converge. Notons S_p sa somme,

$$\text{alors } S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{p^n} \right| = \frac{\left| \frac{z}{p} \right|^2}{1 - \left| \frac{z}{p} \right|} = \frac{|z|^2}{p(p - |z|)}$$

- (b) Comme $S_p \sim \frac{|z|^2}{p^2}$, alors la série $\sum_{p \geq 2} S_p$ est convergente. D'après le critère suffisant de sommabilité, la famille $(u_{n,p})_{n \geq 2, p \geq 2}$ est sommable

2. (a) La famille $(u_{n,p})_{n \geq 2, p \geq 2}$ est sommable, donc d'après le théorème de la sommation par paquets, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) z^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\frac{z^2}{p^2}}{1 - \frac{z}{p}} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p - z)}$$

- (b) Pour $z = 1$, on a $|z| < 2$ et la formule précédente devient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = 1$$

PROBLÈME 2: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$

1. (a) On a

$$\begin{aligned} x_{n-1} - x_n &= -\frac{1}{n} - \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_{n-1} - x_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

- (b) Par le critère de Riemann, la série télescopique $\sum_{n \geq 1} (x_n - x_{n-1})$ converge, donc la suite (x_n) . Soit γ sa limite

2. Soit $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ &= x_n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= x_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \end{aligned}$$

$$\text{donc la série } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \text{ converge et que } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma.$$

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

3. (a) Soit $n \geq 2$, pour tout $k \geq 2$ on a $0 \leq \frac{1}{kn^k} \leq \frac{1}{n^k}$. La série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$ de raison $\frac{1}{n} \in]0, 1[$ est

convergente, donc la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{kn^k}$ convergente. Notons $S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k}$.

(b) On a $0 \leq S_n \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)}$, donc $S_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et par suite $\sum_{n \geq 2} S_n$ converge

(c) D'après le critère suffisant de la sommabilité la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable.

4. D'après la question 2.) on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$.

D'autre part, on a

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$$

La suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable, alors par le théorème de la sommation par paquets

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$$

Avec

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1)$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma - 1 + \ln 2$$

Alors

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1) = \gamma - 1 + \ln 2$$

La série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente de somme $1 - \ln 2$. Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\zeta(n) - 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \gamma$$

PROBLÈME 3: Calcul de trois sommes $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2}$, $\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}$ et $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^{*})^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

1. Il s'agit d'une suite double de réels positifs

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^2 q^2}$ est convergente de somme $S_p = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\zeta(2)}{p^2}$

— La série $\sum_{p \geq 1} \frac{\zeta(2)}{p^2}$ est convergente de somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2)}{p^2} = \zeta^2(2)$

Donc la famille est sommable et par le théorème de sommation par paquets, on a

$$A = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 q^2} = \zeta^2(2)$$

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

2. (a) La famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in I}$ est une sous-famille d'une famille sommable, donc elle est sommable ;
- (b) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément $(1, n) \in I_n$, donc $I_n \neq \emptyset$
 — Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Si $(p, q) \in I_n \cap I_m$, alors $q = np = mp$, donc $m = n$. Absurde
 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n \subset I$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subset I$. Inversement si $(p, q) \in I$, alors $p \mid q$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = pn$, soit $(p, q) \in I_n$, ainsi $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = I$
- On conclut que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de I
- (c) Par le théorème de la sommation par paquets on a:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p \mid q}} \frac{1}{p^2 q^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{p^2 q^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 p^4} \\ &= \zeta(2)\zeta(4) \end{aligned}$$

3. (a) L'application $\sigma : \begin{cases} J_1 & \longrightarrow J_n \\ (p, q) & \longmapsto (pn, qn) \end{cases}$ est une bijection. La famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in J_1}$ est sommable car elle est sous-famille d'une famille sommable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{(p,q) \in J_1} \frac{1}{(np)^2 (nq)^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{(p,q) \in J_1} \frac{1}{p^2 q^2}$$

- (b) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément $(n, n) \in J_n$, donc $J_n \neq \emptyset$
 — Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Si $(p, q) \in J_n \cap J_m$, alors $p \wedge q = m = n$, donc $m = n$. Absurde
 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $J_n \subset \mathbb{N}^{*2}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n \subset \mathbb{N}^{*2}$. Inversement si $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose $n = p \wedge q$, donc $(p, q) \in J_n$, ainsi $\mathbb{N}^{*2} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n$. D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n = \mathbb{N}^{*2}$
- On conclut que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;
- (c) Par le théorème de la sommation par paquets on a:

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{p^2 q^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in J_1} \frac{1}{n^4 p^2 q^2} \\ &= C\zeta(4) \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part } \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^2 q^2} = \zeta^2(2), \text{ donc } \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2} = C = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}$$

PROBLÈME 4: Sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$

1. (a) On a

$$\frac{1}{a^n + b^m} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{b^m} & \text{si } 0 < a < 1 \\ \frac{1}{1 + b^m} & \text{si } a = 1 \\ \frac{1}{a^n} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

De même

$$\frac{1}{a^n + b^m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{a^n} & \text{si } 0 < b < 1 \\ \frac{1}{a^n + 1} & \text{si } b = 1 \\ \frac{1}{b^m} & \text{si } b > 1 \end{cases}$$

- (b) Soit $m \in \mathbb{N}$, la sous-famille $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de la famille sommable $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a^n + b^m}$ est convergente. Donc il est nécessaire que son terme général tend vers 0, soit

$$\frac{1}{a^n + b^m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ceci n'est possible que si $a > 1$.

De la même façon on montre que $b > 1$

2. On suppose que $a > 1$ et $b > 1$. On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}$

(a) Un cadeau de tronc commun: $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $2\sqrt{uv} \leq u + v$.

(b) On utilise inégalité précédente, en posant $u = a^n$ et $v = b^m$:

$$a^n + b^m \geq 2\sqrt{a^n} \sqrt{b^m} \implies \frac{1}{a^n + b^m} \leq \frac{1}{2} \alpha^n \cdot \beta^m$$

(c) $(\alpha^n \beta^m)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite double de réels positifs.

— Soit $m \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha^n \beta^m$ converge, c'est une série géométrique de raison $\alpha \in]0, 1[$, de somme

$$S_m = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \beta^m = \frac{\beta^m}{1 - \alpha}$$

— $\sum_{m \geq 0} S_m$ est convergente car il s'agit d'une série géométrique de raison $\beta \in]0, 1[$

Ainsi la famille $(\alpha^n \beta^m)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Or

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{1}{a^n + b^m} \leq \frac{1}{2} \alpha^n \cdot \beta^m$$

Donc, par le critère de comparaison, $\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

On conclut l'équivalence

$$\left(\frac{1}{a^n + b^m}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \iff a > 1 \text{ et } b > 1$$

PROBLÈME 5: Étude d'une sommabilité

- Si $\alpha \leq 1$, alors pour q fixé, on a $u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \frac{1}{p^\alpha}$ et par le critère de Riemann la série $\sum_{p \geq 1} u_{p,q}$ diverge, donc la non sommabilité de la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$
— Si $\beta \leq 1$, alors pour p fixé, on a $u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \frac{1}{q^\beta}$ et par le critère de Riemann la série $\sum_{q \geq 1} u_{p,q}$ diverge, donc la non sommabilité de la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$
- Par hypothèse $\beta > 1$, alors pour p fixé, on a $u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \frac{1}{q^\beta}$ et par le critère de Riemann la série $\sum_{q \geq 1} u_{p,q}$ converge. Notons X_p sa somme

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

3. (a) L'application φ est continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi_p(t) dt$ est de même nature que la série $\sum_{q \geq 1} \varphi_p(q) = \sum_{q \geq 1} u_{p,q}$ qui est convergente.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on utilise l'encadrement $\int_q^{q+1} \varphi_p(t) dt \leq \varphi_p(q) \leq \int_{q-1}^q \varphi_p(t) dt$. Après on somme de $q = 1$ à l'infini, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t) dt \leq X_p \leq \int_0^{+\infty} \varphi_p(t) dt$$

- (b) On effectue le changement de variable $s = \frac{t}{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \varphi_p(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha + t^\beta} dt = \int_0^{+\infty} \frac{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}{p^\alpha + p^\alpha s^\beta} ds = \frac{1}{p^{(\alpha - \frac{\alpha}{\beta})}} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt$$

et

$$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha + t^\beta} dt = \int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \frac{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}{p^\alpha + p^\alpha s^\beta} ds = \frac{1}{p^{(\alpha - \frac{\alpha}{\beta})}} \int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t) dt$$

On prend $\gamma = \alpha - \frac{\alpha}{\beta}$

4. On a $\int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t) dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt$, donc d'après le théorème d'encadrement $p^\gamma X_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} C = \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt$, d'où $X_p \sim \frac{C}{p^\gamma}$
5. D'après le théorème de sommation par paquets la suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable, si et seulement, si la série $\sum_{p \geq 1} X_p$ est convergente, si et seulement, si la série de Riemann $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^\gamma}$ converge, si et seulement, si $\gamma > 1$.

$$(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \Leftrightarrow \alpha > 1, \beta > 1 \text{ et } \alpha - \frac{\alpha}{\beta} > 1$$