

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

Partie I

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x , de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

1. *Étude de la convergence*

(a) Pour tout $x > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge, on note $F(x)$ sa somme.

(b) Indiquer, sans aucun calcul, la nature et calculer la somme, en fonction de $F(x)$ de la série produit $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

(c) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

2. *Cas où $x = 1$*

On suppose, dans cette question, que $x = 1$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique).

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

Partie II

3. Enoncer le théorème de comparaison d'une série et une intégrale déterminer un équivalent du reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

On pose pour, $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

4. Montrer que pour, $\alpha > 1$, $F(\alpha) = (1 - 2^{1-\alpha})\zeta(\alpha)$.

5. Montrer que pour, $\alpha > 1$, $1 + \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

6. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \zeta(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \zeta(\alpha)$ en déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} F(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$

7. On définit la suite $(x_n)_n$ par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $a_n = x_n - x_{n-1}$

(a) Montrer que $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

- (b) En déduire que $(x_n)_n$ converge vers un réel γ
8. Montrer que $x_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
9. Soit $(y_n)_n$ la suite définie par $y_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_n - \gamma - \frac{1}{2n}$, et on pose $b_n = y_n - y_{n-1}$
- (a) Montrer que : $b_n \sim \frac{1}{6n^3}$
- (b) Montrer que : $y_n \sim \frac{-1}{12n^2}$
- (c) En déduire : $x_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
10. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge absolument.
11. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.
12. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.
13. Montrer que la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable.
14. En déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) = \gamma$.

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

Partie I

1. Étude de la convergence

(a) CSSA

(b) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right)^2 = (F(x))^2.$$

(c) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^\alpha}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes,

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^\alpha} \geq (n-1) \frac{1}{[(n/2)^2]^\alpha} = \frac{(n-1)4^\alpha}{n^{2x}}$$

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^\alpha}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

2. Cas où $x = 1$

(a) $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \\ &= (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\ &= (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2} \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) Monotonie

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n} \left(H_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant

et la série alternée $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ converge.

Partie II

3. Le théorème de comparaison d'une série et une intégrale:

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

THÉORÈME

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, positive, continue et décroissante

Alors l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ sont de même nature

On cherche un équivalent du reste:

Soit $n \geq 1$ et $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissance sur $[1, +\infty[$, alors pour $t \in [k, k+1]$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \implies \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt \\ &\implies \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

Ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$$

ceci implique

$$\frac{(k+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{k^{1-x}}{1-x} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{k^{1-x}}{1-x} - \frac{(k-1)^{1-x}}{1-x}$$

On somme ces inégalités de n à N et on tient compte des sommes télescopiques, on obtient

$$\frac{(N+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{(n+1)^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-x}}{1-x} - \frac{n^{1-x}}{1-x}$$

Puis on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient l'inégalité

$$\frac{(n+1)^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-x}}{x-1} \quad (1)$$

Puis

$$\frac{(n+1)^{1-x}}{n^{1-x}} \leq \frac{x-1}{n^{1-x}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1$$

On a $\frac{(n+1)^{1-x}}{n^{1-x}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\frac{x-1}{n^{1-x}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Soit } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{n^{x-1}}$$

4. Pour $x > 1$, on a:

$$\begin{aligned} F(x) - \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} \\ &= -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x} \zeta(x) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

5. On applique les inégalités (3) avec $n = 1$, on obtient

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{x-1}$$

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

Puis, on ajoute 1 à chaque terme figurant dans les inégalités, alors

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

6. • Limite de ζ en 1:

On a $1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$, donc, par le théorème de majoration,

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$$

- Limite de ζ en $+\infty$:

On a $1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc, par le théorème d'encadrement,

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

- Limite de F en 1^+ :

D'après la question 4., on a: pour tout $x > 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 - 2^{1-x})\zeta(x) \\ &= \frac{1 - 2^{1-x}}{x-1} \cdot (x-1)\zeta(x) \end{aligned}$$

Or $\frac{1 - 2^{1-x}}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln 2$ c'est le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto -2^{1-x}$ en 1.

D'autre part, d'après la question 5.

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} \implies x-1 + 2^{1-x} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$$

Or $x-1 + 2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$, alors $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$, donc

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln 2$$

- Limite de F en $+\infty$:

On a $1 - 2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

7. (a) Soit $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$

- (b) Par le critère de Cauchy, la série télescopique $\sum_{n \geq 1} (x_n - x_{n-1})$ converge, qui est de même nature que la suite

(x_n) , donc la suite (x_n) , Soit γ sa limite

8. On reprend l'équivalent de la question 7a. $x_{n-1} - x_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Les deux séries ATP $\sum_{n \geq 1} (x_n - x_{n-1})$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ sont convergentes, donc leurs restes sont équivalentes, soit

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (x_{k-1} - x_k) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

D'après la question 3., on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (x_{k-1} - x_k) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N (x_{k-1} - x_k) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} x_n - x_N \\ &= x_n - \gamma \end{aligned}$$

Ainsi $x_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$ qui se traduit par $x_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

9. (a) Soit $n \geq 2$, on a:

$$\begin{aligned} b_n &= y_n - y_{n-1} = (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} \\ &= \left[\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\sim \frac{1}{6n^3} \end{aligned}$$

(b) Remarquons d'abord que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a $y_n - y_{n-1} \sim \frac{1}{6n^3}$. Les deux séries ATP $\sum_{n \geq 1} (y_n - y_{n-1})$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{6n^3}$ sont convergentes, donc leurs restes sont équivalentes, soit

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (y_k - y_{k-1}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$$

D'après la question 3., on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12n^2}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (y_k - y_{k-1}) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N (y_k - y_{k-1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} y_N - y_n \\ &= -y_n \end{aligned}$$

Ainsi $-y_n \sim \frac{1}{12n^2}$, puis $y_n \sim \frac{-1}{12n^2}$.

(c) L'équivalent $y_n \sim \frac{-1}{12n^2}$ se traduit par $y_n = \frac{-1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc

$$x_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

10. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \geq 1$, on a $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq |x|^n$. Par le critère de comparaison avec une série géométrique, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge absolument.

11. La fonction $f : x \rightarrow \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in] -1, +\infty[, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

La fonction homographique $\varphi : t \mapsto \frac{t-x}{1+t}$, dont la dérivée $\varphi'(t) = \frac{1+x}{(1+t)^2} > 0$, montre que pour tout t compris entre 0 et x , on a $|\varphi(t)| \leq |x|$, puis que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc pour tout $x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.

12. Soit $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ &= x_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.

13. Il s'agit d'une suite double de nombres réels

- Soit $n \geq 2$, pour tout $k \geq 2$ on a $0 \leq \frac{1}{kn^k} \leq \frac{1}{n^k}$. La série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$ de raison $\frac{1}{n} \in]0, 1[$ est convergente, donc la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{kn^k}$ convergente. Notons $S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k}$.
- On a $0 \leq S_n \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)}$, donc $S_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et par suite $\sum_{n \geq 2} S_n$ converge

D'après le critère suffisant de la sommabilité la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable.

14. D'après la question 12.) on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.

D'autre part, d'après la question 11.), on a

$$\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$$

La suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geq 2 \\ k \geq 2}}$ est sommable, alors par le théorème de la sommation par paquets

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$$

Avec

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1)$$

PRODUIT DE CAUCHY ET ZÉTA DE RIEMANN

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma - 1 + \ln 2$$

Alors

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1) = \gamma - 1 + \ln 2$$

La série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente de somme $-1 + \ln 2$. Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\zeta(n) - 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \gamma$$