

Notations

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- p un entier supérieur ou égal à 2 ;
- I_p désigne l'élément unité de $M_p(\mathbb{K})$ et $\mathcal{O}_p$ sa matrice nulle ;
- $\mathbb{A}$ désigne une $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie ;
- $1_{\mathbb{A}}$ désigne l'élément unité de $\mathbb{A}$ et $0_{\mathbb{A}}$ son élément nul
- $\mathbb{U}(\mathbb{A})$ est le groupe des unités de $\mathbb{A}$
- $\| \cdot \|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathbb{A}$

*** **

1. Soit $a \in \mathbb{A}$. Montrer que les deux applications $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ sont continues sur $\mathbb{A}$
2. Soit $a \in \mathbb{A}$, tel que $\|a\| < 1$
 - (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est convergente
 - (b) Montrer que $1_{\mathbb{A}} - a$ est inversible dans $\mathbb{A}$ et $(1_{\mathbb{A}} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$
 - (c) Montrer que $\|(1_{\mathbb{A}} - a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|a\|}$.
3. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| > \|A\|$ où $\| \cdot \|$ est une norme d'algèbre sur $M_p(\mathbb{K})$
 - (a) Montrer que $I_p - \frac{1}{\lambda}A$ est inversible
 - (b) Dédurre que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset B_f(0, \|A\|)$
4. Soit $a \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$ et $h \in \mathbb{A}$ tels que $\|h\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$
 - (a) Montrer que $\|ha^{-1}\| < 1$
 - (b) Dédurre que $B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subset \mathbb{U}(\mathbb{A})$
 - (c) Conclure
5. Soit $a \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente vers a . Montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, a_n \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$.
6. Justifier que $\text{GL}_p(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_p(\mathbb{K})$
7. Soit $f : \mathbb{U}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{A}, a \mapsto a^{-1}$, $u \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$, $0 < \alpha < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$ et $h \in B(0, \alpha)$
 - (a) Montrer que $1 - u^{-1}h \in \mathbb{U}(\mathbb{A})$ et que $\|(1 - u^{-1}h)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \alpha\|u^{-1}\|}$
 - (b) Établir que $(u - h)^{-1} - u^{-1} = (1 - u^{-1}h)^{-1}u^{-1}hu^{-1}$, puis
$$\|(u - h)^{-1} - u^{-1}\| \leq \frac{\|u^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \alpha\|u^{-1}\|}$$
 - (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{U}(\mathbb{A})$
8. Dédurre que $f : \text{GL}_p(\mathbb{K}) \rightarrow M_p(\mathbb{K}), M \mapsto M^{-1}$ est continue



Non disponible