

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'il existe, la fonction G_X par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$

Partie I: Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$
3. Donner l'expression de G_X , en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
 - (a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
 - (b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p , notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
 - (c) X suit la loi géométrique de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G_X'(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , où $p \in]0, 1[$.

Partie II: La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X , telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$,

(en particulier, sachant que l'événement $[N = h]$ est réalisé, $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $S = \sum_{i=1}^h X_i$).

7. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $G_{X_1 + \dots + X_k} = G_X^k$.
8. (a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^n P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(Y|[N = k]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP((Y = y)|[N = k])$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P((Y = y)|[N = k])$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
 (b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout réel t , $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
 (c) En déduire que pour tout réel t , $G_S(t) = \sum_{k=1}^n P(N = k)G_X^k(t)$.
 (d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
9. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III: Applications

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

10. (a) Déterminer la loi de N .
 (b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.
 (c) En déduire la loi de S , puis son espérance et sa variance.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

11. (a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum_{i=1}^N X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
- (b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S .
- (c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S , la loi, l'espérance et la variance de S .

Partie I: Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Soit $t \in [-1, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|p(X = k)t^k| \leq p(X = k)$. La série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} p(X = k)$ converge de somme 1. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} t^k p(X = k)$ converge normalement sur $[-1, 1]$. Or la convergence normale entraîne la convergence simple. Donc la fonction génératrice est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. G_X est une fonction définie par une série entière, donc les coefficients du développement de la série sont définis d'une manière unique par les relations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad G_X^{(k)}(0) = k! P(X = k)$$

3. (a) Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$. Alors

$$G_X(t) = (1 - p)t^0 + pt = p(t - 1) + 1$$

G_X est un polynôme en t , donc elle est définie sur $\mathbb{R}$

- (b) Si X la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n C_n^k t^k p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= (1 - p + pt)^n \end{aligned}$$

G_X est un polynôme en t , donc elle est définie sur $\mathbb{R}$

- (c) Si X la loi de poisson $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, alors $\forall t \in \left] -\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right[$:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n p^{n-1} \\ &= \frac{tp}{1 - qt} \end{aligned}$$

4. Montrons que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.

$\Rightarrow$) Si X admet une espérance, alors la série $\sum_{n \geq 0} nP(X = n)$ converge. Les deux séries $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$ et

$\sum_{n \geq 1} nP(X = n)t^{n-1}$ sont alors normalement convergentes sur $[-1, 1]$, donc G_X est dérivable en 1 de dérivé $G'_X(1) = E(X)$

$\Leftarrow$) Supposons que G_X est dérivable en 1. Le taux d'accroissement

$$\frac{G_X(t) - G_X(1)}{t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n - 1}{t - 1} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X = n)$$

admet une limite finie quand $t \rightarrow 1^-$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP(X = n) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X = n) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X = n) = G'_X(1) \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} nP(X = n)$ est donc convergente car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

5. Montrons que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.

⇒) Si X admet un moment d'ordre 2, il y a convergence de la série $\sum_{n \geq 0} n^2 P(X = n)$ mais aussi de la série

$$\sum_{n \geq 0} n(n-1) P(X = n).$$

Les trois séries $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$, $\sum_{n \geq 1} nP(X = n)t^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 0} n(n-1)P(X = n)t^n$ sont alors normalement convergentes sur $[-1, 1]$, donc G_X est deux fois dérivable en 1 de dérivé premier $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$ et de dérivé second

$$G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

Soit $E(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1)$. Par la formule de Huygens, on obtient

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

⇐) Supposons que G_X deux fois dérivable en 1. La fonction G_X est dérivable en 1, donc X admet une espérance. On sait de plus l'expression de $G_X'(t)$ sur $[-1, 1]$.

$$G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1}$$

$$\frac{G_X'(t) - G_X'(1)}{t - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \frac{t^{n-1} - 1}{t - 1} P(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X = n)$$

admet une limite finie quand $t \rightarrow 1^-$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N n(n-1)P(X = n) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^N n \sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X = n) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} n \sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X = n) = G_X''(1) \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)P(X = n)$ est donc convergente car c'est une série à termes positifs aux sommes

partielles majorées. Or la série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)P(X = n)$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} n^2 P(X = n)$ converge, c'est-à-dire, la variable X admet un moment d'ordre 2

6. On a: $\forall t \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$, $G_X(t) = \frac{tp}{1-qt}$ qui est la restriction d'une fraction rationnelle, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$, avec

$$G_X'(t) = \frac{p}{(1-tq)^2}$$

$$G_X''(t) = \frac{2pq}{(1-tq)^3}$$

avec $1 \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$, on obtient $G_X'(1) = \frac{1}{p} = E(X)$ et $G_X''(1) = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$. Ainsi

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Partie II: La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X , telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$,

(en particulier, sachant que l'événement $[N = h]$ est réalisé, $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $S = \sum_{i=1}^h X_i$).

1. Par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

— Pour $k = 1$, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $G_{X_1}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p p(X_1 = p) = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p p(X = p) = G_X(t)$. Donc

$$G_{X_1} = G_X$$

— Pour $k = 2$. Par définition $G_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2})$. Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, alors t^{X_1} et t^{X_2} le sont aussi et par suite $E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1}).E(t^{X_2}) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_X^2(t)$. Soit $G_{X_1+X_2} = G_X^2$

— Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. Supposons l'égalité vraie pour k et montrons la pour $k+1$. Notons $Y = \sum_{i=1}^k X_i$, alors, par l'indépendance héritée Y et X_{k+1} sont indépendantes, donc $G_{Y+X_{k+1}} = G_Y G_{X_{k+1}} = G_Y G_X$. Par hypothèse de récurrence $G_Y = G_{X_1+\dots+X_k} = G_X^k$, donc $G_{X_1+\dots+X_k+X_{k+1}} = G_{Y+X_{k+1}} = G_X^{k+1}$

2. (a) La famille $([N = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad p(Y = y) = \sum_{k=1}^n p(Y = y | N = k) p(N = k)$$

Donc

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} yp(Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{k=1}^n yp(Y = y | N = k) p(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{y \in Y(\Omega)} yp(Y = y | N = k) p(N = k) \quad \text{Les sommes finies} \\ &= \sum_{k=1}^n p(N = k) \sum_{y \in Y(\Omega)} yp(Y = y | N = k) \\ &= \sum_{k=1}^n p(N = k) E(Y | N = k) \end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y = t^S$. Par le théorème du transfert:

$$E(t^S | N = k) = \sum_{s \in S(\Omega)} t^s p(S = s | N = k)$$

Mais l'événement $[S = s | N = k] = [\sum_{i=1}^k X_i = s]$, donc

$$\begin{aligned} E(t^S | N = k) &= \sum_{s \in S(\Omega)} t^s p\left(\sum_{i=1}^k X_i = s\right) \\ &= G_{X_1+\dots+X_k}(t) = G_X^k(t) \end{aligned}$$

Soit $E(t^S | [N = k]) = G_X^k(t)$.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y = t^S$. On a

$$G_S(t) = E(t^S) = \sum_{k=1}^n p(N=k) E(t^S | N=k) = \sum_{k=1}^n p(N=k) G_X^k(t)$$

$$G_S(t) = \sum_{k=1}^n P(N=k) G_X^k(t).$$

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par le théorème du transfert

$$G_N \circ G_X(t) = G_N(G_X(t)) = \sum_{k=1}^n G_X^k(t) p(N=k) = G_S(t)$$

Donc $G_S = G_N \circ G_X$.

3. On a $G'_S(t) = G'_X(t) \cdot G'_N(G_X(t))$, en particulier

$$E(S) = G'_S(1) = G'_X(1) \cdot G'_N(G_X(1)) = G'_S(t) = G'_X(1) \cdot G'_N(1) = E(N)E(X)$$

Partie III: Applications

En cours