

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Dans ce problème, $(X_k)_{k \geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux à deux indépendantes et prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q = 1 - p, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On définit une nouvelle suite $(S_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires par

$$\forall n \geq 1, S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Partie I

1. Préciser l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_k , $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer la loi de la variable aléatoire S_N pour tout entier naturel non nul N .
3. En utilisant un théorème de convergence dont il faut préciser l'énoncé et en choisissant convenablement le paramètre p , montrer que l'on a l'équivalence

$$\sum_{r=0}^n C_{2n^2}^{n^2+r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

Partie II

Si x est un réel, $E(x)$ désignera sa partie entière. Soient ε et λ deux réels strictement positifs.

4. Soit x un nombre réel ;
 - (a) Si $x \geq 1$, montrer que $e^{x^2} + x \geq e^x$.
 - (b) Si $x \leq 1$, Justifier que

$$e^{x^2} + x - e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{2k} \left(\frac{1}{k!} - \left(\frac{1}{(2k)!} + \frac{x}{(2k+1)!} \right) \right),$$

puis en déduire que $e^{x^2} + x \geq e^x$. On pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x \leq 0$.

- (c) Montrer que $pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p} \leq e^{\lambda^2}$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \sum_{k=0}^{E(n(p-\varepsilon))} C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1+E(n(p+\varepsilon))}^n C_n^k p^k q^{n-k}.$$

6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\lambda n \varepsilon} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{\lambda(np-k)} p^k q^{n-k} + \sum_0^n C_n^k e^{\lambda(k-np)} p^k q^{n-k} \right).$$

7. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\lambda n \varepsilon} \left((pe^{-\lambda q} + qe^{\lambda p})^n + (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n \right).$$

On pourra remarquer que $p + q = 1$.

8. Montrer que , pour tout entier $n \geq 1$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{\lambda^2 n - \lambda n \varepsilon},$$

puis que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}.$$

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

9. Comparer cette majoration avec celle obtenue en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
10. Donner une estimation de la probabilité de l'événement $\bigcup_{n \geq m} \{w \in \Omega ; \left| \frac{S_n(w)}{n} - p \right| \geq \varepsilon\}$, pour tout entier $m \geq 1$.

Peut-on avoir une estimation de cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Extrait: CNC-2007



En cours

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES