

Révision (Réduction des endomorphismes)

Exercice : (Extrait du concours national 2016)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

- Montrer que M admet une valeur propre double α_0 dans $\mathbb{C}$.
- En déduire que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que l'on précisera.
- Montrer que la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|\alpha_0| < 1$. En cas de convergence, préciser la limite de cette suite.

Problème 1: (Voir concours 2014)

Problème 2: (Réduction des matrices d'ordre 2 + Matrices circulantes ...)

1. Exemples.

Etudier la diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la matrice A dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Généralités.

Soit dans la suite une matrice : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, quelconque.

a. Montrer que : $\chi_A(x) = x^2 - \text{tr}(A).x + \det(A)$.

b. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si :

- $(\text{tr}(A))^2 - 4.\det(A) \neq 0$, ou :
- $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}, A = \lambda_0.I_2$.

Indication : on pourra examiner tous les cas suivant la valeur du discriminant de χ_A .

c. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si :

- $(\text{tr}(A))^2 - 4.\det(A) > 0$, ou :
- $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, A = \lambda_0.I_2$.

II.

On définit la matrice : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer J^2 et J^3 , puis préciser J^k pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
- En notant : $j = e^{\frac{2.i.\pi}{3}}$, rappeler la valeur (en la justifiant) de $1 + j + j^2$.
- Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.
- Déterminer une matrice inversible : $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, telle que : $J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix} P^{-1}$.
- Etant donné trois nombres complexes a, b, c , on pose : $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
 - Exprimer $A(a, b, c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2 .

- b. En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a,b,c .
- c. Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.
- d. Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a,b,c et de j sous la forme d'un produit.
6. On pose : $E = \{A(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.
- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est en préciser une base et la dimension.

Problème 3 : (Sur les matrices stochastiques ...)

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, $\mathbf{I}_p$ la matrice diagonale de $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j .
- On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j .
- On dit qu'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A_n)_{i,j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (A)_{i,j}$.
- On dit qu'une suite $(L_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1, \dots, p\}, (L_n)_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (L)_j$.
- On admet que, si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B , alors la suite $(A_n B_n)_{n \geq 1}$ de matrices converge vers la matrice AB .
- On admet que si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(L A_n)_{n \geq 1}$ de matrices converge vers la matrice LA .
- On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :
$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A)_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$$
 et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

- a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A)_{i,j} \geq 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.
- Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, AB \in \mathcal{ST}_p$.
- On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$

a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

 - Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;
 - Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».
- Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ .

On note i un élément de $\{1, \dots, p\}$ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, |x_k| \leq |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leq 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leq 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Delta$ et en déduire : $B_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$.

4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p$.

b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.

À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, (A)_{i,j} = P_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie I.3, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1} .

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geq 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geq 1}$.

Partie 4: Voir exercice 7 série de révision sur les espaces normés.